gd

Gabriele Dragotto
gabriele.dragotto@studenti.polito.it

SERIE E SUCCESSIONI

A. RICHIAMI SULLE SUCCESSIONI

DEFINIZIONE

FUNZIONE CON $\mathrm{DOM} f \subseteq \mathbb{N}$

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

a_n TERMINE GENERALE

$+\infty$ P.TO DI ACCUMULAZ.

VERIFICA DEFINITIVA

a_n V. DEF $=$ $n \geq n_0 \Rightarrow K = \text{TRUE}$

TEOREMI SULLE SUCCESSIONI

A. TEOREMI SUI LIMITI

UNICITÀ, LIMITATEZZA LOCALE, PERMANENZA SEGNO, ALGEBRA.

B. TEOREMI SUL COMPORTAMENTO

A. CONFRONTO

FINITO E INFINITO

B. ASSOLUTA CONV.

$\lim a_n = 0 \iff \{|a_n|\}$ INFINIT.MA

C. PRODOTTO

$\lim a_n = 0 + \lim b_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim a_n \cdot b_n = 0$

D. CRITERIO DEL RAPPORTO

$a_n > 0 \quad \forall n \geq N_0 \quad \exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$

$\rho < 1 \quad \lim a_n = 0$

$\rho > 1 \quad \lim a_n = +\infty$

B. SERIE NUMERICHE

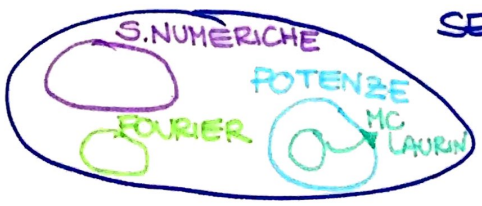
DEFINIZIONE

SOMMA ∞ DI TERMINI DI UNA SERIE

$$\sum_{K=0}^{+\infty} a_K = a_0 + a_1 + \cdots a_\infty$$

$S_K \quad \sum_{n=K}^{+\infty} a_K$ SOMMA PARZIALE

SERIE DI FN.



COMPORTAMENTO SERIE

$$\lim_{n \to +\infty} S_k = ?$$

CONDIZIONE NECESSARIA $\lim a_k = 0$ <u>CN CONV.</u>

A. AGGIUNGO K AGGIUNGENDO UN N. FINITO IL COMP. NON CAMBIA

B. RESTO n_{SIMO} $R_n = S_{+\infty} - S_k$

SE S_∞ CONVERGE $\lim R_n = 0$

$a_{n+1} < E_{RRORE}$

CRITERI DI CONVERGENZA

A. CONFRONTO

1. NORMALE
B. ASINTOTICO $a_k \asymp b_k$
C. O(PICCOLO)

B. RAPPORTO $a_k \geq 0$

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \rho \qquad \begin{array}{ll} \rho > 1 & \text{DIVERGE} \\ \rho < 1 & \text{CONVERGE} \end{array}$$

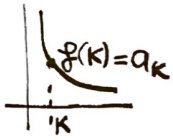
C. RADICE $a_k \geq 0$

$$\lim \sqrt[k]{a_k} = \rho \qquad \begin{array}{ll} \rho > 1 & \text{DIVERGE} \\ \rho < 1 & \text{CONVERGE} \end{array}$$

D. INTEGRALE O MCLAURIN

$f : [k_0, +\infty] \to \mathbb{R}$
$a_k = f(k)$

- POSITIVA
- CONTINUA
- DECRESCENTE



$$\sum_{n=k_0+1}^{+\infty} a_n \leq \int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=k_0}^{+\infty} a_n$$

E. CRITERIO LEIBNIZ

SERIE S. ALTERNO $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$

SE a_k :

- INFINITESIMA
- MONOTONA
- DECRESCENTE $a_k \geq a_{k+1}$

LA SERIE <u>CONVERGE</u>

F. CONVERGENZA ASSOLUTA.

$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ CONVERGE $\Rightarrow$ S_∞ CONVERGE e $|S_\infty| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$

IMPLICA LA CONV. SEMPLICE!

SERIE NOTEVOLI

SERIE TELESCOPICA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = A_{k+1} - A_0$$

EX: MENGOLI

$$\sum \frac{1}{k(k+1)} = \sum\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

GEOMETRICA

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$$

$q \leq -1$???

$|q| < 1$ CONV.

$q \geq 1$ DIVERGE

$$S_\infty = \frac{1}{1-q} \quad \text{SE } |q|<1$$

PRODOTTO DI CAUCHY

PRODOTTO a_k e b_k NON È $a_k \cdot b_k$!

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

SUCCESSIONE DI FUNZIONI

DEFINIZIONE

INSIEME ORDINATO DI FN. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\{f_n\} : \mathbb{N} \to f_n(x)$$

FISSO X SUCCESSIONE NUMERICA!

CONVERGENZE

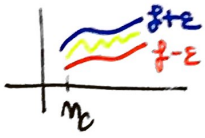
PUNTUALE

$\forall x \in A$ $\quad \lim f_n(x) = f(x)$

UNIFORME

$\forall x \in A$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$

PER WEIERESTRASS



$n \geq n_0$

A È COMPATTO $\Rightarrow$ $\sup_{x \in A} \to \max_{x \in A}$

NORMALE O TOTALE

$\forall x \in A$ $\quad \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$ CONVERGE

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in A} f_n$$

TOTALE $\Rightarrow$ UNIFORME $\Rightarrow$ PUNTUALE

TOTALE $\Rightarrow$ ASSOLUTA

SERIE DI FUNZIONI

DEFINIZIONE

$\{f_k\}$ $f_k : D \to \mathbb{R}$ SUCCESSIONE DI FN.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x)$$

FISSATO UN $x \in D$ — CONTROLLO IL COMPORTAM. DELLA SERIE

CONVERGENZA

A. PUNTUALE

$S_n(x) \to S(x) \quad \forall x \in A$

$\lim S_n(x) = S(x)$

B. UNIFORME

$\lim \| [S_n - f] \|_\infty = 0$

$\iff \lim \sup_{x \in A} (S_n - f) = 0$

C. ASSOLUTA

$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ CONV. PUNTUALMENTE

D. NORMALE O TOTALE

CONVERGE $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in A} (f_n(x))$

TOTALE $\nearrow$ ASSOLUTA $\Rightarrow$ PUNTUALE

TOTALE $\searrow$ UNIFORME $\nearrow$ PUNTUALE

TEOREMI

A. CONTINUITÀ E UNIFORME

A. $\{f_k\}$ FN. CONTINUE

B $S_n \to S$ UNIF.

$\Rightarrow$ $f = S$ È CONTINUA

B. INTEGRAZIONE

A. $\{f_k\}$ INTEGRABILI IN $I \in \mathbb{R}$

B $f_n \to f$ UNIFORM IN $I \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f È INTEGRABILE

C. DERIVAZIONE

A. $\{f_k\} \in C^1$ IN I

B. $f_n \to f$ $\boxed{\text{PUNT.}}$

C. $(f_n)' \to g$ $\boxed{\text{UNIF}}$

$\Rightarrow$

1. $f \in C^1(I)$
B. $(f_n)' = (f_n')$
C. $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE

ZOOM: POTENZE, FOURIER, TAYLOR

A. SERIE DI POTENZE

DEFINIZIONE

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-x_0)$$

x_0 CENTRO
a_k COEFFICIENTI

TEOREMA CONVERGENZA

SE z_m CONVERGE IN x_i ALLORA

CONVERGE $(-|x_i|, |x_i|)$

NON CONVE. $(-\infty, -|x_i|) \cup (|x_i|, +\infty)$

INTERVALLI DI CONVERGENZA

A. SOLO IN x_0

B. HA UN RAGGIO $R>0$

1. ASSOLUT PUNTUALE IN $(-R,R)$
2. UNIFORME $\forall [a,b] \in (-R,R)$ TEOREMA DI ABEL
3. NON CONV. $(-\infty;R) \cup (R,+\infty)$

C. $\forall x \in \mathbb{R}$
PUNTUALE e (ASSOLUTA IN $[a,b] \in \mathbb{R}$)

CRITERI DI CONVERG.

A. RAPPORTO

$$\exists \lim_k \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \rho \qquad R = \begin{cases} 0 & \text{SE } \rho = +\infty \\ +\infty & \text{SE } \rho = 0 \\ 1/\rho & \text{SE } \rho \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

B. RADICE

$$\exists \lim_k \sqrt[k]{|a_k|} = \rho \qquad R = \begin{cases} 0 & \text{SE } \rho = +\infty \\ +\infty & \text{SE } \rho = 0 \\ 1/\rho & \text{SE } \rho \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

SOMMA $R_S \geq \min\{R_1; R_2\}$

PRODOTTO $R_P \geq \min\{R_1; R_2\}$

DERIVATA HA LO STESSO RAGGIO!

TEOREMI

A. DERIVABILITÀ INFINITE VOLTE!

B. INTEGRABILITÀ VEDI SOPRA :)

B. SERIE DI TAYLOR

DEFINIZIONE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ $x_0=0$ MC LAURIN

IN UN INTORNO DI x_0 $f_n \to f$

$S_n = T_{f,n,x_0}$ LA SOMMA DELLE n RIDOTTE DI f IN x_0 È IL POL. DI TAYLOR

SVILUPPABILITÀ IN $I(x_0)$ SE

$$\lim S_n(x) = \lim T_{f,n,x_0}(x) = f(x)$$

SVILUPPI NOTEVOLI

$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ $R=\mathbb{R}$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ $R=(-1,1)$

$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k}$ $R=(-1,1]$

$(x+1)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ $R=(-1,1)$

$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$

$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

$\cos x = \sin x \text{ con } (k+1)$

B². LIMITI NOTEVOLI

- $\lim \sqrt[n]{n^k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- $\lim \sqrt[n]{a^k} = 1 \quad \forall a>0, \forall k \in \mathbb{R}$
- $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$
- $\lim \frac{(\log n)^p}{n^k} = 0 \quad \forall p,k \in \mathbb{R}, k>0$

FORMULA DI STIRLING

$$n! \sim n^n \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad n \to +\infty$$

B³. NOZIONI PRELIMINARI

CONTINUA A TRATTI — CONTINUA TRANNE IN k PUNTI DI <u>SALTO</u>

REGOLARIZZATA — IN OGNI SALTO x_n $f(x_n) = \frac{1}{2}(f(x_n^+) + f(x_n^-))$

REGOLARE A TRATTI — f È REG. A TRATTI IN $[a,b]$ SE:

A. DERIVABILE IN $[a,b] \setminus k$ PUNTI

B. CONTINUA A TRATTI CON DERIVATA

$\tilde{C}_{2\pi}$ SPAZIO — $\tilde{C}_{2\pi}$ = SPAZIO VETTORIALE:
- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ REGOLARIZZATE
- CONTINUE A TRATTI
- $T=2\pi$

C. SERIE DI FOURIER

DEFINIZIONE

POLINOMIO TRIGONOMETRICO IN FORMA

$$S_{m,f} = a_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot kx\right)dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx$$

F DISPARI $a_k = 0 \ \forall k \geq 0$

F PARI $b_k = 0 \ \forall k \geq 0$

APPROSSIMO $\tilde{C}_{2\pi}$ CON UNA PROIEZIONE IN P_m

$\approx$ CONV. NON PUNTUALE

$=$ CONV. PUNTUALE

TEOREMA DELLA PROIEZIONE

SE $f \in \tilde{C}_{2\pi}$

A. $\exists!\ P \in \mathbb{P}_m \,/\, (f-P, Q) = 0 \ \forall Q \in \mathbb{P}_m$

B. $\exists!\ P \in \mathbb{P}_m \,/\, \|f-P\|_2 = \min_{Q\in\mathbb{P}_m} \|f-Q\|_2$

DISUGUAGLIANZA BESEL

$$2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k + b_k) \leq \|f\|_2^2$$

TEOREMA RIEMAN BESGUE

$\forall f \in \tilde{C}_{2\pi}$ $\quad \lim a_k = \lim b_k = 0$

UGUAGLIANZA DI PARSEVAL

$$\int_0^T |f^2(x)|\,dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

CONVERGENZA

A. UNIFORME

SE $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ REG. A TRATTI CONT. A TRATTI IN I $\Rightarrow$ $S_{m,f} \xrightarrow{UNI} f$ $\forall [a,b] \in I$ IN CUI È
- REGOLARIZZATA
- CONTINUA

CONV. SEMPRE AL VALORE REGOLARIZZATO

B. PUNTUALE

SE $f \in \tilde{C}_{2\pi}$ ED È

$\Rightarrow S_{m,f} \xrightarrow{PUNT} f$

A. (REG. A TRATTI) o

B. (MONOTONA) o

ALLA REGOLARIZZATA

C. QUADRATICA

SE $f \in \tilde{C}_{2\pi}$

FUNZIONI IN $\mathbb{R}^m$ E SPAZI

A. SPAZI

SPAZIO METRICO (X,d) X INSIEME d METRICA /

A. $d(x,y) > 0 \quad \forall x,y \in X$
$d(x,y) = 0 \iff x = y$

B. $d(x,y) = d(y,x)$

C. $d(x_1,x_3) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3)$

INTORNO SFERICO $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x_0,x) < r\}$

INTERNO $\mathring{X} = \text{INT}\,X$

ESTERNO $\text{EST}\,X$

FRONTIERA ∂X

CHIUSURA $\overline{X} = X + \partial X$

APERTO $\text{INT}(A) = A$

CHIUSO ∂A È APERTO

LIMITATO $\exists r > 0 / A \in B_r(x_0)$

COMPATTO CHIUSO + LIMITATO

PUNTO DI ACCUMULAZ. $\overline{x}$ È P.TO DI A PER ASE $\forall r > 0 \quad B_r(x) \cap A \setminus \underline{x} \neq \emptyset$

CONNESSO UN INSIEME :
- SEMPLICEMENTE
- PER ARCHI POLIGONALI

B. CALCOLO DIFFERENZIALE

DERIVATA $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \quad x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^m$ È DERIVABILE

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x}_0 + t\overline{v}) - f(x_0)}{t} \quad \text{ESISTE} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

$v = e_i$ DERIVATA PARZIALE

PIANO TANGENTE IN $\mathbb{R}^3$ $z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$

LIMITE $\forall I(p) \; \exists I(\overline{x}_0) = B_r(x_0) /$
$\forall x \in (\text{DOM} f \cap B_r(x_0)) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(p)$

CONTINUITÀ INCLUDO x_0 ~~$\setminus\{x_0\}$~~

UNIFORME CONTINUITÀ $\forall x_1, x_2 \in \text{DOM} f \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \sigma > 0 /$
$\|x_1 - x_2\| < \sigma \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon$

SVILUPPO DI TAYLOR $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \cdot H_f(x_0)$
PER $x \to x_0$

DERIVABILITÀ

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad A \neq \emptyset$ APERTO

DERIVABILE IN x_0 SE $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \forall i = 1 \to n$

NEI PTI DI FRONTIERA NON È LECITO DERIVARE, MA

$$f_{,k} := \lim_{x \to x_0} f_{,k}(x_0)$$

GRADIENTE

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

SOLO DOVE f È DERIVABILE

$$\nabla f : x \to \nabla f(x)$$

$$\nabla f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \cdot \vec{e}_i$$

ROTORE $\quad \mathrm{ROT} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \nabla f \times f$

$$\mathrm{ROT} f = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (w_z - w_y) & (w_x - w_z) & (w_x - w_y) \end{bmatrix}$$

DIVERGEN. $\quad \mathrm{DIV} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \nabla f \cdot f$

$$\mathrm{DIV} f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

MATRICE JACOBIANA

$$J f = \begin{bmatrix} df_1/dx_1 & \cdots & df_1/dx_n \\ df_m/dx_n & \ddots & df_m/dx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{bmatrix}$$

MATRICE HESSIANA

$$H f = \begin{bmatrix} df_1/dx_1 dx_1 & \cdots & df_1/dx_1 dx_n \\ df_1/dx_n dx_1 & \cdots & df_n/dx_n dx_n \end{bmatrix}$$

TEOREMA DI SCHWARTZ

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO $\neq \emptyset$

f DERIVABILE 2 VOLTE IN A

$\exists\, df/dp\,dk, \ \exists\, df/dk\,dp$

$\Rightarrow df/dp\,dk = df/dk\,dp$

MAX / MIN

$\mathrm{DET}(H f(x_0)) =$
- $+$: MAX ($f_{xx} > 0$) / MIN ($f_{xx} < 0$)
- 0 : ?
- $-$: SELLA

TEOREMI

A. WEIRSTRASS $\quad f: K$ COMPATTO $\to \mathbb{R}$ CONTINUA $\Rightarrow \exists$ MAX MIN

B. CANTOR $\quad$ // $\quad$ UNIFORMEMENTE CONTINUA

C. VALORI MEDI $\quad$ // $\quad \exists x \in A \,/\, m \leq x \leq M$

D. LAGRANGE $\quad f$ CONTINUA IN $[a,b]$, DIFFERENZ IN (a,b) $\Rightarrow \nabla f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

DIFFERENZIABILITÀ DI FRECHET

$A \subseteq \mathbb{R}^m \neq \emptyset$ APERTO

$f: A \to \mathbb{R}^m$

A. DERIVABILE IN x_0

B. $\exists L: T_x\mathbb{R}_m \to \mathbb{R}$ /

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

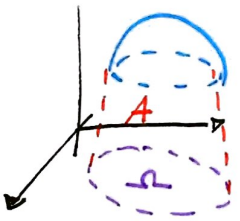
$$\Leftrightarrow \quad f(x+h) - f(x) - L(h) = o(\|h\|) \quad h \to 0$$

$$L := \langle \nabla f(x_0), \vec{h} \rangle = df_h(x_0)$$

DIFF $\Rightarrow$ DERIVABILITÀ $\Rightarrow$ CONTINUITÀ

INTEGRAZIONE DOPPIA^2 ®™

INTUITIVAMENTE



A È LA MISURA $(m+1)$ DIMENSIONALE

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{3=m+1}$

MISURA DI Ω $\quad m_n(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx$

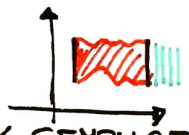
DIAMETRO DI Ω $\quad \mathrm{DIAM}(\Omega) = \max_i (\mathrm{DIAM}\, D_i)$

$\mathrm{DIAM}(D_i) = \sup_D (d(x,y) \ \forall x,y \in D)$

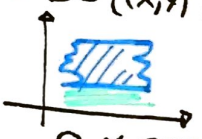
DOMINI SEMPLICI

// VERT. CONVESSO $\quad D = \{(x,y) \subseteq \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

// ORIZ. CONVESSO $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(x) \leq x \leq \beta(x) \ \ a \leq y \leq b\}$



O X-SEMPLICE VERTICALE



O X SEMPLICE ORIZZONTALE

$\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE!

FORMULE DI SOSTITUZIONE

VERT. CONVESSO $\quad \int_\Omega f\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} [f(x,y)\,dy]\,dx$

ORIZ. CONVESSO $\quad \int_\Omega f\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} [f(x,y)\,dx]\,dy$

RETTANGOLO $\quad \left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)\left(\int_c^d f_2(y)\,dy\right)$

$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILE

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA E LIMITATA.

$\phi: \Omega' \to \Omega$ TALE CHE:

A. È BIETTIVA

B. $\phi \in C^1$

C. $\mathrm{DET}(J_\phi(u,v)) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \Omega'$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(\phi(u,v)) \cdot |\mathrm{DET} J_\phi(u,v)|\,du\,dv$$

A. POLARI

$$\begin{cases} x = \phi_1(u,v) = \rho\cos\theta \\ y = \phi_2(u,v) = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \mathrm{DET}\, J_\phi = \rho$$

B. ELLITTICHE

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\cos\theta \end{cases} \qquad \mathrm{DET}\, J_\phi = ab\rho$$

INTEGRALE IMPROPRIO

A. DISCONTINUO D

B. NON LIMITATO D

DOMINIO INVADENTE :)

EX: $f = \frac{1}{x^2+y^2}$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$

$D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \varepsilon \leq x^2+y^2 \leq 1\}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy \begin{cases} \text{DIVERGE} \\ \text{CONVERGE} \end{cases}$$

BARICENTRO

$$x_D = \frac{1}{m(D)} \iint_D x\,dx\,dy \qquad y_D = \frac{1}{m(D)} \iint_D y\,dx\,dy$$

$$m(D) = \int_a^b [\alpha(x) - \beta(x)]\,dx \geq 0$$

TEOREMA DI GULDINO $\quad \mathrm{VOL}(S) = m(D) \cdot \alpha \cdot d = m(D) \cdot P_{BAR}$

EX $\quad R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq y \leq b \quad 0 \leq x \leq \alpha(x)\}$

$$\mathrm{VOL}(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dy = 2\pi\, x_B\, \mathrm{AREA}(R)$$

INTEGRALI TRIPLI 3

FORMULE PER FILI

FILI Z

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x,y) \in D \quad \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \cdot \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy$$

ANALOGAMENTE PER X, Y

STRATO

INTERSEZIONE TRA UN PIANO PARALLELO AD UNO DEI PIANI DEI VERSORI E IL SOLIDO

STRATO Z

$$A_{z_0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ (x,y,z_0) \in \Omega\}$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ a \le b \le z, \ (x,y) \in \Omega_z\}$$

$$\int_\Omega f = \int_a^b \left[\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\right] dz$$

CAMBIAMENTI DI VAR

SFERICHE

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin(\alpha)\cos\beta \\ y = \rho \cdot \sin(\alpha)\sin\beta \\ z = \rho \cdot \cos(\alpha) \end{cases} \qquad \det_\phi J = \rho^2 \sin(\alpha)$$

CILINDRICHE

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = k \end{cases} \qquad \det J_\phi = \rho$$

$$\int_\Omega f = \int_{\Omega'} f(\phi(u,v,w)) \cdot |\det J_\phi| \ du\,dv\,dw$$

INTEGRALI CURVILINEI

A. CONCETTI PRELIMINARI

CURVA

CLASSE DI EQ. TRA PARAMETRIZZAZIONI A SEGNO UGUALE.

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \mathrm{Im} f \ \text{SOSTEGNO}$$

SEMPLICE — INIETTIVA E CHIUSA

CHIUSA — $f(a) = f(b)$ IN $[a,b]$

REGOLARE — $f \in C^1([a,b])$ e $f'(t) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$

PARAMETRIZZ. EQUIVALENTI

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi = J \to \mathbb{R}^n$

$\gamma \Leftrightarrow \varphi$ SE $\exists\ \alpha : J \to I$ BIIETTIVA /

A. $\alpha \in C^1$

B. $\alpha'(t) > 0 \quad \forall t \in J$

C. $\varphi = \gamma \circ \alpha$

VERSI UGUALI $\alpha'(t) > 0$

VERSI OPPOSTI $\alpha'(t) < 0$

ASCISSA CURVILINEA

$s : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt$$

TERNA DI FERNET

NORMALE $\quad \bar{N}(s) = \dfrac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \dfrac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$

TANGENTE $\quad \bar{T}(s) = \dfrac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}$

BINORMALE $\quad \bar{B}(s) = \bar{T}(s) \times \bar{N}(s)$

CURVATURA $\quad k(s) = \|\gamma''(s)\| = \|\gamma'(s) \times \gamma''(s)\|$

TORSIONE $\quad \tau(s) = \dfrac{\alpha'(s) \cdot \gamma''(s) \times \gamma'''(s)}{k^2(s)}$

LA PARAM. DEVE ESSERE NATURALE! IN ASCISSA CURVILINEA

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

CURVA PIANA $\quad L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+f^2(x)}\, dx \qquad \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

CURVA $\quad L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \qquad \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

B. INTEGRALI CURVILINEI

FORMULE

PRIMA SPECIE $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CAMPO SCALARE

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

SECONDA SPECIE $\quad F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ CAMPO VETTORIALE

$$\int_\gamma F = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\, dt$$

SE γ È REG. A TRATTI $\quad \sum_{k=0}^{m} \int_{\gamma_m} (F \vee f)$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

A. CONCETTI PRELIMINARI

SUPERFICIE FORMA GEOMETRICA SENSA SPESSORE $\Sigma: \sigma \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO E CONNESSO

$$\Sigma = \sigma(A) = \begin{cases} \alpha(u,v) = x \\ \beta(u,v) = y \\ \gamma(u,v) = z \end{cases}$$

$$\Sigma = \{\sigma(u,v) : (u,v) \in A\}$$

SOSTEGNO = IMMAGINE $\sigma(A)$

SEMPLICE È INIETTIVA (σ)

REGOLARE
- $\sigma \in C^1(A)$
- DEF. $J_\sigma(u,v)$ HA $RK = 2$ → LE DERIVATE NON SI ANNULLANO NELLO STESSO PUNTO

CALOTTA REGOL. RESTRIZIONE DI σ AD UN COMPATTO $K \subseteq A$

VETTORE NORMALE

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

IL VERSO (ENT - USC) DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE $(u_0, v_0) \in$ INT(SUP)

B. INTEGRALI DI SUPERFICIE

FORMULE

FN. REALE $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ $\quad \Sigma = \sigma(K)$ $\quad$ DOM $\sigma = A$

$\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ CALOTTA REGOLARE

$$\int_\Sigma f = \iint_A f(\sigma(u,v)) \, \| N(u,v) \| \, du \, dv$$

1. PARAMETRIZZO SUPERFICIE Σ
2. DERIVO σ $\quad \partial\sigma/\partial u \quad \partial\sigma/\partial v$
3. NORMALE $\sigma_u' \times \sigma_x'$
4. MODULO $\|N\|$

CAMPO VETTOR. $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad K \subseteq \mathbb{R}^2$ COMPATTO FRONTIERA CURVILINEA

$\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ CALOTTA REG.

$$\int_\Sigma F \cdot n = \iint_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v) \, du \, dv$$

CAMPO CONSERVATIVO.

A. γ CHIUSA $\oint_\gamma F = 0$

B. $\exists V / V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\vec{F} = \nabla V$ IN $\mathbb{R}^n$

GREEN, GAUSS e STOKES ™

TEOREMA DI GREEN

INT. LINEA = INT. DOPPIO

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO $\neq \emptyset$

$F: \Omega \to \mathbb{R}^2$ CAMPO VETTORIALE C^1

$F = (f_1, f_2)$ $\quad A \subseteq \Omega$ APERTO LIMITATO

∂A SOSTEGNO CURVA

$$\oint_{\partial A} F\,dP = \int_A \left(\frac{df_2}{dx}(x,y) - \frac{df_1}{dy}(x,y) \right) dx\,dy$$

$\oint_{\partial A} F\,dP = \int_A$ //

$\rho \in [a,b]$
$\theta \in [0, \pi/2]$

TEOREMA DI STOKES

INT. LINEA = INT. FLUSSO O SUPERFICIE

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO $\neq 0$

$F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ CAMPO VETTORIALE C^1

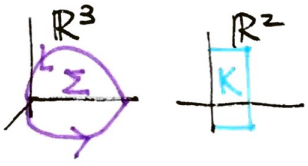
$F = (f_1, f_2, f_3)$ $\quad A \subseteq \Omega$ A. LIM CONN PER ARCHI

∂A UNIONE DI SOSTEGNI IN $\mathbb{R}^3$

$K = \bar{A} = A + \partial A$ $\quad \sigma: K \to \mathbb{R}^3$ CALOTTA REGOLARE

$$\oint_{\partial\sigma} F\,dP = \int_\sigma \text{ROT}\,F \cdot \vec{m}$$

$$\text{ROT}\,F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \bar{i} & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$



TEOREMA DI GAUSS

INT. FLUSSO O SUPERFICIE = INT. TRIPLO

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTO $\neq 0$

$F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ CAMPO VETTORIALE C^1

$F = (f_1, f_2, f_3)$ $\quad D \subseteq \Omega$ APERTO CON BORDO ∂D

$$\int_{\partial D} F \cdot dm = \int_D \text{DIV}\,F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$\text{DIV}\,F = \frac{df_1}{dx}(x,y,z) + \frac{df_2}{dy}(x,y,z) + \frac{df_3}{dz}$$

FORME DIFFERENZIALI

DEFINIZIONE

OGGETTO DETTO K-FORMA, DEFINITA SU A^m CON DIMENSIONE $K < m$.

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO $0 \leq K \leq m$

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} a_i(x_1, \dots x_m) dx_i$$

FORMA LINEARE

$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$

A, B CONTINUE IN $\mathbb{R}^2$

È IL DIFF. DI UNA FN. f $\quad df = \omega$

È INTEGRABILE

ESATTA $\quad \exists f / \quad df = \omega \iff \oint_\gamma \omega = 0$

CHIUSA $\quad \dfrac{dA}{dy} = \dfrac{dB}{dx}$

TEOREMI

A. CONTINUITÀ E (ESATTEZZA + CHIUSURA)

SE ω È A. CLASSE C^1
B. ESATTA $\Rightarrow \omega$ È CHIUSA

B. ESATTEZZA E CHIUSURA

SE ω È ESATTA $\Rightarrow \omega$ È CHIUSA

CN ESATTEZZA È LA CHIUSURA!

C. CHIUSURA: TEOR DI POINCARRÈ

ω È A. CHIUSA
B. DEFINITA IN $A \subseteq \mathbb{R}^2$ SEMPLIC. CONNESSO $\Rightarrow \omega$ È ESATTA

NON HA BUCHI

CALCOLO DELLE PRIMITIVE

SOLO SE f È ESATTA.

METODO INTEGRAZIONI INDEFINITE

A. INTEGRO A VB $(x \vee y)$
B. DERIVO A VB RISP A $y \vee x$
C. EGUAGLIO A VB A B VA

Note finali

Alcuni dei contenuti presenti nelle seguenti dispense sono stati liberamente tratti dai materiali didattici disponibili al Politecnico di Torino.
Le dispense sono state elaborate dal sottoscritto come complemento allo studio e non intendono in alcun modo sostituire la completezza dei libri di testo e delle lezioni dalle quali sono state liberamente tratte.
Le dispense sono state scritte per l'esame di Analisi Matematica 2 - Talenti dell'A.A. 2015-2016 docenti Valeria Chiadò Piat e Alfio Grillo, corso di laurea in Ingegneria Gestionale L8.
E' doveroso quindi citare alcuni delle fonti da cui sono stati liberamente tratti alcune parti di esercizi e/o metodologie di soluzione:

- Valeria Chiadò Piat, Alfio Grillo, Slides del corso e materiale fornito, A.A. 2015-2016.
- wikipedia.org