



gd

© **Gabriele Dragotto**  
gabriele.dragotto@studenti.polito.it  
AA 2015-16

# Geometria

## Campi e spazi vettoriali

### CAMPO

Un campo  $K$  è una **struttura algebrica** composta da un insieme non vuoto  $K$  e da **2 operazioni binarie interne**, chiamate somma e prodotto e indicate di solito rispettivamente con  $+$  e  $*$ , che godono delle **seguenti proprietà**

$$\forall a, b \in K$$

#### PROPRIETA' DELLA SOMMA:

1. ASSOCIATIVA RISPETTO ALLA SOMMA  
 $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. COMMUTATIVA  
 $a+b = b+a$
3. EL. NEUTRO SOMMA  
 $0+a = a+0 = a$
4. ESISTENZA EL. OPPOSTO  
 $\forall a \exists -a / a+(-a) = -a+a = 0$

#### PROPRIETA' DEL PRODOTTO:

1. ASSOCIATIVA RISPETTO AL PRODOTTO  
 $(a*b)*c = a*(b*c)$
2. COMMUTATIVA  
 $a*b = b*a$
3. EL. NEUTRO PRODOTTO  
 $1*a = a*1 = a$
4. ESISTENZA EL. OPPOSTO  
 $\forall a \neq 0 \exists a^{-1} / a*a^{-1} = a^{-1}*a = 1$

### SOTTOCAMPO

Un sottoinsieme di un campo  $K$  è tale se e solo se:

#### 1. CHIUSO RISPETTO A SOMMA E PRODOTTO

Gli elementi risultanti dall'operazione appartengono ancora al sottocampo

#### 2. CONTIENE EL. NEUTRO S/P

## SPAZIO VETTORIALE

Uno **spazio vettoriale** su un campo  $K$  è un insieme  $V$  dotato di due **operazioni** che soddisfano una certa lista di assiomi. Gli elementi di  $V$  sono detti vettori e quelli di  $K$  scalari. Le operazioni sono:

$$U = L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$$

$U$  è sempre sottospazio. Se i  $v$  sono LI allora è anche base.

### PROPRIETA':

$$+: V \times V \longrightarrow V$$

$$\times: V \times \mathcal{R} \longrightarrow V$$

#### 1. SU $V$ SONO DEFINITI

somma, el.opposto, el.neutro, associatività e commutatività

#### 2. DISTRIBUTIVA P. PER UNO SCALARE

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v} \quad \forall a \in K \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

$$(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v} \quad \forall a, b \in K \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

#### 3. ASSOCIATIVA P.SCALARE

$$(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v}) \quad \forall a, b \in K \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

#### 4. NEUTRALITA' P.SCALARE

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

### EX

- L'insieme  $K[x]$  dei polinomi a coefficienti in  $K$  e con variabile  $x$
- $K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$
- L'insieme delle matrici  $K^{m \times n}$

## TEOREMA SPAZI VETTORIALI

In uno spazio vettoriale  $V$ :

$$A. \exists! \vec{0}$$

$$B. \forall \vec{v} \in V \quad \exists! -\vec{v}$$

$$C. \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V \quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} + \vec{z} \Rightarrow \vec{z} = \vec{y}$$

$$D. \forall \vec{x} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{x}\lambda = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \vee \lambda = 0$$

$$E. \forall \vec{x} \in V \quad \vec{x}(-1) = -\vec{x}$$

## SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Sia  $K$  un campo, sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $K$  e sia  $W$  un sottoinsieme non vuoto di  $V$ . L'insieme  $W$  è un **sottospazio vettoriale** di  $V$  se è uno spazio vettoriale su  $K$ , con le operazioni di somma e moltiplicazione per scalare, e se è **chiuso rispetto ad esse e contiene l'elemento nullo**.

## LE BASI

La base di uno spazio vettoriale è un **insieme di vettori linearmente indipendenti** che generano lo spazio

A. I vettori  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  sono linearmente indipendenti in  $K$ , ovvero la relazione:

$$\sum_{i=1}^n a_i \vec{v}_i = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n = \mathbf{0} \Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n = 0$$

B. I vettori  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  generano  $V$ , ovvero:

$$V = \text{Span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) := \{a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_n \vec{v}_n \mid a_1, \dots, a_n \in K\}$$

## RICERCA BASE IN UN SISTEMA LINEARE

$$N_{\text{vettori-LI}} = \text{col}(A) - \text{rk}(A)$$

## BASE ORTONORMALE.

Una base ortonormale di uno spazio vettoriale **munito di prodotto scalare** definito positivo è una base composta da **vettori di norma unitaria e ortogonali tra loro**, ossia una base ortogonale di vettori di norma uno.

Una base ortogonale per  $V$  è una base composta da vettori a due a due ortogonali, cioè tali che:

$$A. \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \quad i \neq j$$

$$B. \forall \vec{v} \Rightarrow \|\vec{v}\| = 1$$

## INSIEME DI GENERATORI

un sottoinsieme  $S$  di un insieme  $A$  dotato di una struttura algebrica è **un insieme di generatori per  $A$**  se tutti gli elementi di  $A$  possono essere ottenuti dagli elementi di  $S$  tramite combinazioni di operazioni definite su  $A$ .

## FINITAMENTE GENERATO

Un gruppo  $G$  è finitamente generato se ha un **insieme finito di generatori**.

- Un **sistema di generatori di uno spazio vettoriale è certamente un suo sottospazio**.
- Per ogni spazio vettoriale non vuoto, **esistono infiniti sistemi generatori**.
- La base di uno spazio vettoriale **è sempre un sistema di generatori**; al contrario, un sistema di generatori non è necessariamente una base.
- La minima cardinalità di un insieme  **$S$**  di generatori per  **$V$**  è la **dimensione di  $V$**

## FORMULA DI GRASSMAN

$$\dim(W + U) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(W \cap U)$$

## SOMMA DIRETTA

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$$

$$V = U \oplus W$$



## SPAZI NON FINITAMENTE GENERATI

**Esempio 4.27** Lo spazio vettoriale  $\mathbb{R}[x]$  dei polinomi a coefficienti in  $\mathbb{R}$  è un esempio di spazio vettoriale reale *non finitamente generato*. Infatti, se  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$  sono  $k$  polinomi e  $d$  è il loro massimo grado, allora  $\mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x))$  non contiene polinomi di grado maggiore a  $d$  e quindi  $\mathbb{R}[x] \neq \mathcal{L}(p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x))$ . È facile, invece, verificare che il sottospazio vettoriale  $\mathbb{R}_n[x]$  dei polinomi di grado minore o uguale ad  $n$  è finitamente generato:

$$\mathbb{R}_n[x] = \mathcal{L}(1, x, x^2, \dots, x^n).$$

## DIMENSIONE SPAZIO VETTORIALE

*la dimensione di uno spazio vettoriale è la cardinalità di una sua base, ovvero è il numero di vettori che la compongono.*

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) &= n \\ \dim(\mathbb{R}[x]) &= \infty \\ \dim(\mathbb{R}_n[x]) &= n + 1\end{aligned}$$

## LEMMA DI STEINITZ

*In uno spazio vettoriale di dimensione finita, il numero di vettori linearmente indipendenti che compaiono in un sistema libero non può mai superare la dimensione, cioè il numero di elementi di una base (quindi di ogni base)*

Siano  $V$  uno spazio vettoriale sul campo  $K$  con

base  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  e  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  un sistema di generatori di  $V$ .

Allora  $n \leq m$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, a_{n+1}, \dots, a_m\}$  è un sistema di generatori di  $V$ .

## INDIPENDENZA LINEARE

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $K$ . Dati  $v_1, v_2$  elementi di  $V$ , si dice che essi sono **linearmente indipendenti** su  $K$  se in tale campo la relazione:

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i = 1 \dots n \ a_i = 0$$

### EX

$(1, 0, 2, 1), (-1, 1, 0, 0), (1, 1, 4, 2), (-1, 2, 2, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rk(A) = 2 \Rightarrow 2$  vettori indipendenti

*I vettori della matrice non ridotta che corrispondono alle colonne contenenti i pivot nella matrice ridotta*

$(1, 0, 2, 1), (-1, 1, 0, 0)$

# Calcolo vettoriale

## VETTORE

*Elemento di uno spazio vettoriale.*

**Segmento orientato.**

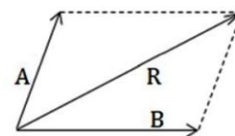
dall'idea intuitiva di una grandezza fisica caratterizzata da **intensità**,  
**direzione e verso.**

$$\overrightarrow{AB} = \begin{cases} \text{direzione } \overrightarrow{AB} \\ \text{verso } \overrightarrow{AB} \\ \|\overrightarrow{AB}\| \end{cases}$$

## SOMMA VETTORIALE

In due dimensioni i vettori possono essere sommati con la **regola del parallelogramma**, oppure **sommando analiticamente le componenti omonime**. **LA SOMMA E' COMPLANARE**

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$



### PROPRIETA':

1. EL NEUTRO
2. EL OPPOSTO
3. ASSOCIATIVA
4. COMMUTATIVA

## NORMA O LUNGHEZZA

Una **norma** è una **funzione** che assegna ad ogni **vettore di uno spazio vettoriale**, tranne lo zero, una **lunghezza positiva**.

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\longrightarrow [0, +\infty) \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

### PROPRIETA':

- A.  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$  e  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$   
B.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$   
C.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$  (disuguaglianza triangolare)

$(X, \|\cdot\|)$  SPAZIO NORMATO

## PRODOTTO SCALARE VETTORE

Un generico vettore può essere moltiplicato per uno scalare appartenente al **campo di definizione**.

$$\mathbb{R} \times V_3 \longrightarrow V_3, \quad (\lambda, \mathbf{x}) \longmapsto \lambda \mathbf{x},$$

- Teorema 3.2**
1.  $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_3;$
  2.  $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V_3;$
  3.  $\lambda(\mu \mathbf{x}) = (\lambda \mu)\mathbf{x}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V_3;$
  4.  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V_3.$

## RETTA VETTORIALE

Dato un generico vettore  $\mathbf{v}$  la retta vettoriale è l'insieme

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \{\lambda \mathbf{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Teorema 3.4**
1. Due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  di  $V_3$  sono linearmente dipendenti se e solo se sono paralleli, ossia se e solo se appartengono alla stessa retta vettoriale.
  2. Tre vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  di  $V_3$  sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari, ossia se e solo se appartengono allo stesso piano vettoriale.
  3. Quattro vettori di  $V_3$  sono sempre linearmente dipendenti.

**3 vettori di  $V_3$  sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.**

## PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare è un'**operazione binaria** che associa ad ogni coppia di vettori appartenenti ad uno spazio vettoriale definito sul campo reale un elemento del campo.

0 se i vettori sono ortogonali

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}$$

## PROPRIETÀ:

- A. Simmetria:  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$
- B. Linearità rispetto al primo termine:  $\langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$   $\langle k\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = k \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- C. Positività  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$

## ANALITICAMENTE:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \vartheta$$

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

## PRODOTTO VETTORIALE

Il prodotto vettoriale è un'operazione binaria interna tra due vettori in uno spazio euclideo tridimensionale che restituisce un altro vettore che è normale al piano formato dai vettori di partenza.

0 se i vettori sono paralleli

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\times : (v, w) \rightarrow v \times w$$

$$a \wedge b$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

### PROPRIETA':

#### A. Bilinearità

$$(k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} \text{ (distributivo rispetto all'addizione)}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

#### B. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}$ linearmente indipendenti ( $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \forall \mathbf{a}$ )

#### C. Anticommutativo

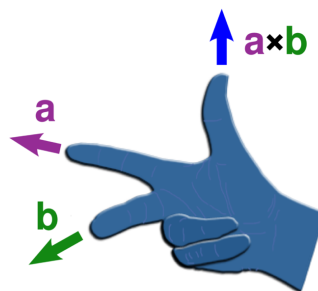
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

#### D. Non è associativo

#### E. Identità di Jacobi

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

## REGOLA MANO DESTRA

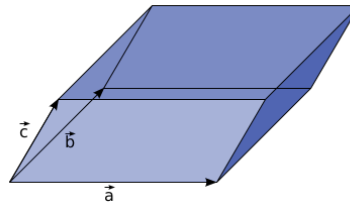


Ammette permutazioni



## PRODOTTO MISTO

Il prodotto misto è un'espressione in cui compaiono contemporaneamente **prodotti scalari e vettoriali** di vettori dello spazio tridimensionale.  $V(\text{Parallelepipedo}) = 6V(\text{Piramide})$



$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

## PROIEZIONE DI UN VETTORE SU UN PIANO

$$\vec{v}_w = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w}$$

	P. SCALARE $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	P. VETTORIALE $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	P. MISTO $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
VARIABILI IN INGRESSO	2 VETTORI	2 VETTORI DI $\mathbb{R}^3$	3 VETTORI DI $\mathbb{R}^3$
COS'È IL RISULTATO	UNO SCALARE ( $\in \mathbb{R}$ )	UN VETTORE ( $\in \mathbb{R}^3$ )	UNO SCALARE ( $\in \mathbb{R}$ )
DEFINIZIONE	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$ OPPURE $\vec{u} \cdot \vec{v} =  \vec{u}   \vec{v}  \cos(\hat{u}\hat{v})$ $(\Rightarrow \hat{u}\hat{v} = \arccos(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u}   \vec{v} }))$	$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$ $= \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ v_1 u_3 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}$	$\vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
COSA VUOL DIRE QUANDO SI ANNULLA	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $\vec{u} \perp \vec{v}$	$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$	$\vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v} = 0$ $\Downarrow$ $\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}$ COMPLANARI
OSSERVAZIONI SUI "MODULI"	Se $ \vec{v}  = 1 \Rightarrow  \vec{u} \cdot \vec{v} $ È IL MODULO DELLA PROIEZIONE DI $\vec{u}$ SU $\vec{v}$ : 	 $\sin(\alpha) = h/ \vec{u} $ $\Rightarrow  \vec{u} \times \vec{v}  =  \vec{v}  h = \text{Area del parallelogramma}$	$ \vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v} $ Volume del parallelepipedo $\parallel$ 6. Volume della piramide

## MATRICE

Una matrice è una **tabella ordinata** di elementi.

$$A = \begin{pmatrix} [A]_{1,1} & [A]_{1,2} & \cdots & [A]_{1,n} \\ [A]_{2,1} & [A]_{2,2} & \cdots & [A]_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [A]_{m,1} & [A]_{m,2} & \cdots & [A]_{m,n} \end{pmatrix}$$

## SOMMA MATRICIALE

Solo se le dimensioni  $m \times n$  della matrice sono identiche.

$$[A + B]_{i,j} := [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$$

## MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE

## MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI

Definita soltanto se  $m \times p$   $p \times n = m \times n$

$$[C]_{i,j} = \text{Row}_i(A) \times \text{Col}_j(B) = [A]_{i,1}[B]_{1,j} + [A]_{i,2}[B]_{2,j} + \cdots + [A]_{i,p}[B]_{p,j}$$

Quest'ultimo viene detto *prodotto riga per colonna*. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

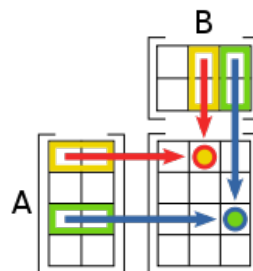
Si osserva che moltiplicando una matrice  $2 \times 3$  per una  $3 \times 3$  si ottiene una matrice  $2 \times 3$ .

Prima riga:

$$[C]_{1,1} = (1 \times 1) + (1 \times 2) + (2 \times 0) = 3$$

$$[C]_{1,2} = (1 \times 1) + (1 \times 5) + (2 \times (-2)) = 2$$

$$[C]_{1,3} = (1 \times 1) + (1 \times 1) + (2 \times 1) = 4$$



## RAPPRESENTAZIONE SISTEMI LINEARI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

## MATRICI PARTICOLARI

### MATRICE QUADRATA

Ha lo stesso numero di righe e colonne  $n \times n$

### MATRICE INVERSA

$$AB = BA = I_n$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Una matrice è invertibile solo se ha **DET  $\neq 0$**

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ SE A,B INVERTIBILI}$$

$$A^{n \times n} \text{ è invertibile} \Leftrightarrow rk(A) = n$$

### MATRICE DIAGONALE

Matrice **quadrata** in cui **solamente i valori della diagonale** principale possono essere **diversi da 0**.

### MATRICE ANTISIMMETRICA

Matrice **quadrata** con **zeri sulla diagonale**

### MATRICE TRASPOSTA

La matrice ottenuta scambiandone le **righe con le colonne**.

### MATRICE TRIANGOLARE

La matrice ottenuta avendo tutti gli elementi **sopra e/o sotto la diagonale nulli**.

- $TRSUP + TRSUP = TRSUP$
- $TRSUP * TRSUP = TRSUP$
- $(TRSUP)^{-1} = TRSUP$
- $TRSUP * K = TRSUP$

## MATRICI RIDOTTE

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \in R \\ 1 \leq j \leq n \in R}}$$

Una matrice **è ridotta per righe** se in **ogni riga c'è almeno un elemento non nullo**, che viene detto **elemento speciale**, **al di sotto del quale ci sono solamente zeri**; sopra ci può essere qualunque numero, anche 0. **Esistono più matrici ridotte, ma una sola fortemente ridotta.**

Row step reduced form caratterizzata dalle seguenti proprietà:

1. **Un marker (prima entrata non nulla) per colonna.**
2. **Tutti i markers ordinati secondo la direzione  $\searrow$ ;**
3. **Tutte le eventuali righe nulle in basso.**

### MATRICE FORTEMENTE RIDOTTA

Tutti i **pivots** devono essere uguali a **1**, e gli altri elementi non nulli devono essere al di sopra del pivot, nelle colonne marker.

**La forma fortemente ridotta è unica!**

## TEOREMA DI BINET

Siano  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  due matrici **quadrate** di ordine  $n$  nel campo  $K$ .

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

## COROLLARIO

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice di ordine  $n$

$$\det(x\mathbf{A}) = x^n \det(\mathbf{A})$$

## OPERAZIONI ELEMENTARI

Data una matrice  $\mathbf{A}$   $m \times n$  appartenente al campo  $R, \mathbb{C}$  si definiscono le seguenti **operazioni elementari**

E1.  $R_i \rightarrow R_i + \alpha R_{i_0} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$  (sostituzione)

E2.  $R_i \rightarrow \alpha R_i \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$  (m.scalare)

E3.  $R_i \rightarrow R_j$  (scambio)

## PROPOSIZIONE

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice definita come sopra. Allora esiste una serie finita di operazioni elementari che **trasforma  $\mathbf{A}$  in una matrice ridotta per righe** (fortemente)

## RANGO DI UNA MATRICE

Data una matrice  $\mathbf{A}$  ridotta per righe, si dice rango il **numero di righe con elementi non nulli. (numero righe linearmente indipendenti)**  
**Numero di pivot nella ridotta**

**Definizione 4.2.2.** Sia  $\mathbf{A} \in k^{m,n}$ ,  $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , e sia  $\mathbf{A}'$  una matrice ridotta per righe ottenuta da  $\mathbf{A}$  con una successione finita di operazioni elementari di riga. Il numero di righe di  $\mathbf{A}'$  contenenti entrate non nulle viene detto rango di  $\mathbf{A}$  ed indicato con il simbolo  $\text{rk}(\mathbf{A})$ .

**Esempio 4.2.4.** Si consideri la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Poiché con operazioni elementari di riga  $\mathbf{A}$  può essere trasformata in una delle due matrici

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 37/4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -19/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

segue che  $\text{rk}(\mathbf{A}) = \text{rk}(\hat{\mathbf{A}}) = \text{rk}(\mathbf{A}') = 3$ .

## 1. TUTTE LE MATRICI RIDOTTE DA UNA MATRICE $\mathbf{A}$ HANNO RANGO UGUALE

2.  $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}^{-1})$

3.  $\rho(\mathbf{z}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} = \text{nulla}$

4.  $\text{rank}(\mathbf{AB}) \leq \min\{\text{rank}(\mathbf{A}), \text{rank}(\mathbf{B})\}$ .

5.  $\text{rk}(\mathbf{a}) \leq \min\{m, n\}$

6.  $\text{rank}(\mathbf{A}) + \text{rank}(\mathbf{B}) - n \leq \text{rank}(\mathbf{AB})$ .



## TEOREMA DI KRONECKER

In una **matrice A**, considerata una **sottomatrice quadrata di ordine p con determinante diverso da zero**, si definiscono orlati tutte le **sottomatrici quadrate di ordine p+1**, ottenute aggiungendo una riga e una colonna di A.

**Se tutti gli orlati hanno determinante nullo, allora  $rk(A)=p$**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli orlati di  $A_m$  (con determinante definito non nullo) risultano con determinante nullo, quindi il teorema è confermato.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

## COROLLARIO

Il rango di una matrice quadrata è **uguale al suo ordine** se e solo se il **determinante è diverso da zero**.

$$A^{n \times n} \text{ è invertibile } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rk(A) = n$$

## COROLLARIO 2

Se  $r(A) = n$ , allora, detta **A'** una **matrice ridotta per righe** ottenuta da A,  $\det(A) =$  prodotto el.speciali

## EQUAZIONI MATRICIALI

$$\begin{cases} a + b + 2c + e = 1 \\ -b + d + g = 0 \\ 3b + f + 3g = -2. \end{cases}$$

## MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

## MATRICE COMPLETA

$$(A|B)$$

## SISTEMA OMOGENEO

La matrice dei coefficienti B è nulla.

## SISTEMA COMPATIBILE

Il sistema ammette delle soluzioni

## FORTEMENTE RIDOTTA PER RIGHE

**Definizione 3.2.2.** La matrice  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in k^{m,n}$ ,  $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , si dice fortemente ridotta per righe se valgono le seguenti proprietà:

- (FR1) se la riga di indice  $i_0$  contiene entrate non nulle allora esiste una sua entrata  $a_{i_0, j_0}$ , detta pivot (della riga di indice  $i_0$ ), che vale 1 e tale che  $a_{i, j_0} = 0$  per ogni  $i \neq i_0$ ;
- (FR2) se tutte le entrate della riga di indice  $i_0 < m$  sono nulle allora le entrate di ogni riga di indice  $i > i_0$  sono anch'esse nulle.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 4 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## RIDUZIONE PER RIGHE

Gli elementi speciali possono essere diversi da uno.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \boxed{5} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## CALCOLO MATRICE INVERSA

## COFATTORI

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \text{Cof}(a_{1,1}) & \text{Cof}(a_{1,2}) & \dots & \text{Cof}(a_{1,n}) \\ \text{Cof}(a_{2,1}) & \text{Cof}(a_{2,2}) & \dots & \text{Cof}(a_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cof}(a_{n,1}) & \text{Cof}(a_{n,2}) & \dots & \text{Cof}(a_{n,n}) \end{bmatrix}^T$$

**D** Calcolare la matrice inversa della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

**R** Per prima cosa osserviamo che  $\det A = -3$ , quindi la matrice  $A$  è effettivamente invertibile. Avremo allora

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \tilde{A}^T$$

con

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \implies A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il metodo permette di risolvere le **equazioni matriciali**  $AX=B$ .

**Invertendo la matrice A e moltiplicandola per B ottengo x**

## CALCOLO MATRICE INVERSA

## METODO DI RIDUZIONE

$$\begin{aligned} (A | I_n) &= (I_n | A^{-1}) \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - 3r_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_3 \mapsto r_3 - (1/3)r_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{r_1 \mapsto r_1 - 2r_2 \\ r_2 \mapsto r_2 - 3r_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{r_1 \mapsto r_1 + 2r_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1/3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

## COMPL.TO ALGEBRICO

Definiamo **complemento algebrico di un elemento** qualunque  $A(h,k)$  il **determinante** che si ottiene togliendo la riga e la colonna su cui si trova l'elemento in questione **con il segno** positivo se  $h+k$ =numero pari ed il segno negativo se  $h+k$ =numero dispari

$$(-1)^{(h+k)} C_{h,k}$$

## TEOREMA DI LAPLACE

Data una matrice di dimensione  $n$  il suo determinante è dato da

$$\det M = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \det M_{ij}$$

## SECONDO TEOREMA DI LAPLACE

$$0 = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{kj} \det M_{ij} \quad \text{con } i \neq k$$

## ALTRE PROPRIETA' DET

### DETERMINANTE MATRICI DIAGONALI/TRIANGOLARI

E' il prodotto degli elementi sulla diagonale!

### SOMMA E PRODOTTO

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

# Applicazioni Lineari e forme quadratiche

## APPLICAZIONE LINEARE

In matematica, una trasformazione lineare è una **funzione lineare tra due spazi vettoriali sullo stesso campo**, cioè una funzione che conserva le operazioni di **somma di vettori e di moltiplicazione** per uno scalare.

$$f: V \rightarrow U \quad U, V \text{ spazi vettoriali su } K$$

A. Additività

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$$

B. Omogeneità di 1° grado

$$f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \quad \forall \alpha \in K, \forall \vec{x} \in V$$

$$\Rightarrow f(\vec{0}_V) = \vec{0}_U$$

## CLASSI DI AL

$$Hom_K(U, V) := \{f: U \rightarrow V \mid f \text{ è lineare}\}$$

$$End_K(V) := Hom_K(V, V)$$

$$Iso_K(U, V) := \{f \in Hom_K(U, V) \mid f \text{ è biiettivo}\}$$

$$Aut_K(V) := Iso_K(V, V)$$

Un **endomorfismo** è un **omeomorfismo** (classe di Al) con insieme di partenza e arrivo identico.

Un **automorfismo** è un **isomorfismo** (classe di Al biettive) con insieme di partenza e arrivo identico.

## SPAZI ISOMORFI

Due spazi vettoriali  $V$  e  $W$  si dicono **isomorfi** se l'insieme  $Iso(K) \neq \emptyset$ .  
In questo caso è possibile costruire un Al tale che

$$f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i \quad \forall i$$

## RANGO AL

Si dice **rango dell'applicazione lineare** la **dimensione dell'insieme immagine**.

$$f: U \rightarrow V$$

$$rk(f) = rk(F) = \dim(\text{Im}(f))$$

## KERNEL O NUCLEO AL

Il kernel, o nucleo, è l'**insieme dei vettori mappati in 0v**

$$F\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$f: U \rightarrow V$$

$$\ker(f) = \{\vec{x} \in U : f(\vec{x}) = \mathbf{0}\}$$

$\ker(f)$  sottospazio di  $U$

$$\dim(\ker(f)) = \text{null}(f)$$



## INIETTIVITA'

$$\begin{aligned} f: U \rightarrow V \text{ iniettiva} &\Leftrightarrow \ker(f) = \{0_V\} \\ &\Leftrightarrow \\ \dim(\ker(f)) &= \text{null}(f) = 0 \\ \dim(U) &= \dim(\text{Im}(f)) \end{aligned}$$

## SURIETTIVITA'

Un'applicazione lineare si dice suriettiva se:

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ \text{Im}(f) &= Y \\ f: U \rightarrow V \text{ è suriettiva} &\Rightarrow \text{Im}(f) = V \\ &\Leftrightarrow \\ \dim(\text{Im}(f)) &= \text{rank}(f) = \dim V \\ \dim(U) &= \dim(V) + \dim(\ker(f)) \end{aligned}$$

## AL E MATRICI

Ad ogni  $F \in K^{n \times m}$  corrisponde un'unica a.l.  $f: K^m \rightarrow K^n$ ;  
Ad ogni a.l.  $f: K^m \rightarrow K^n$  corrisponde un'unica  $F \in K^{n \times m}$ .

**Esempio 2:** Sia  $F := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ . Ad essa possiamo associare l'a.l.

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ 3x + y + 2z \end{pmatrix} \end{cases}.$$

**Esempio 3:** Viceversa all'a.l.

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x + y \\ -x \end{pmatrix} \end{cases}$$

risulta "naturalmente" associata la matrice  $F := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

## COLONNE AI

Definiscono i valori che assumono gli **elementi della base canonica**.

## ENDOMORF. SEMPLICE

Si dice che  $f$  è un **endomorfismo semplice** se **ammette una base di autovettori**  $\Rightarrow$  **E' diagonalizzabile**

## INVERTIBILITA'

$$\begin{aligned} \det(F) &\neq 0 \\ F &\text{ è iniettiva e suriettiva} \\ \text{A. } \dim(V) &= \dim(\text{Im} F) = \dim(U) \\ \text{B. } \dim(\ker(f)) &= 0 \end{aligned}$$

## EX

1) Prendiamo l'omomorfismo definito da  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definito da

$$F(x, y, z) = [y + z, 3x + y, x + y + z, 2z]$$

e calcoliamo la dimensione del nucleo e dell'immagine, per poi determinare una base per entrambi. Prima di tutto scriviamo la matrice associata ad  $F$

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Consideriamo l'insieme dei vettori colonna di  $A_F$ , che costituisce un sistema di generatori per l'immagine:  $\{[0, 3, 1, 0], [1, 1, 1, 0], [1, 0, 1, 2]\}$ .

Il **rango della matrice** è pari a 3, dunque  $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ . Per vederlo ci basta considerare il minore di ordine 3 costituito dalle prime tre righe e dalle tre colonne della matrice rappresentativa. Tale minore ha **determinante** non nullo, dunque tutti e tre i vettori colonna costituiscono una base di  $\text{Im}(F)$ , infatti formano un sistema di generatori di  $\text{Im}(F)$  e sono **linearmente indipendenti** tra loro.

Passiamo al nucleo. Il teorema della nullità più rango ci garantisce che  $\dim(\text{Ker}(F)) = 0$ , infatti

$$\dim(\text{Ker}(F)) = \dim(V) - \dim(\text{Im}(F)) = 3 - 3 = 0$$

## TEOREMA DEL RANGO

$$f : U \rightarrow V$$

$$\dim(U) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$$

$$f \text{ iniettiva} \iff \text{Ker}(f) = \{0_V\} \iff \underbrace{\dim(\text{Ker}(f))}_{\text{null}(f)} = 0.$$

$$f \text{ suriettiva} \iff \text{Im}(f) = V \iff \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{\text{rank}(f)} = \dim V.$$

$$\dim U = \underbrace{\dim(\text{Ker}(f))}_{\text{null}(f)} + \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{\text{rank}(f)}.$$

## COROLLARIO

- A.  $\dim(U) < \dim(V)$ . **F NON E' SURIETTIVA**
- B.  $\dim(U) > \dim(V)$ . **F NON E' INIETTIVA**

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rank}(f) = \text{rank}(F)$$

$$\text{Im}(f) = \text{Col}(f) = \text{base AL (arresto la ricerca a rank}(f))$$

$$\text{ker}(F) = \text{ker}(f) = Fx=0$$

$$\text{null}(f) = \text{null}(F) = \dim(\text{ker}(f))$$

## ESERCIZI

### Saper fare: determinare una base per lo spazio vettoriale $\text{Im}(f)$ - Caso $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$

Ritorniamo su questo tipo di problema, lasciato in sospeso, affrontandolo dapprima nel caso  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ . Essò è facilmente risolto alla luce del fatto che  $\text{Im}(f) = \text{Col}(F)$ . Ossia:

- ▶ data l'a.l.  $f$ , se ne scrive la matrice associata  $F$ ;
- ▶ si trova una base per lo spazio vettoriale  $\text{Col}(F)$  utilizzando la solita tecnica di riduzione;
- ▶ la base trovata (per  $\text{Col}(F)$ ) costituisce anche una base per  $\text{Im}(f)$ .

**D** Sia  $f$  l'a.l. corrispondente alla matrice  $F$  dell'Esercizio 2,

$$F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare  $\text{null}(f)$  e una base di  $\text{Ker}(f)$ .

**R** Si tratta di studiare prima, e risolvere poi (con le tecniche sviluppate a suo tempo), il sistema lineare omogeneo  $F\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Siccome la matrice  $F$  ammette la forma ridotta  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , il suo rango è 2, e quindi per il teorema di Rouché-Capelli avremo  $n - r = 5 - 2 = 3$  parametri liberi. Pertanto  $\text{null}(f) = 3$ .

Determinare  $\text{null}(f)$  e una base di  $\text{Ker}(f)$ .

**R** La soluzione generale del sistema lineare omogeneo si scrive allora immediatamente come

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 - 2x_4 - 3x_5 \\ 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(f) = [(1, 2, 1, 0, 0), (-2, -3, 0, 1, 0), (-3, -4, 0, 0, 1)].$$

## EX

### Saper fare: determinare una base per lo spazio vettoriale $\text{Im}(f)$ - Caso $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$

**Esercizio 5:**

**D** Sia  $f$  l'a.l. corrispondente alla matrice  $F$  dell'Esercizio 2,

$$F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base di  $\text{Im}(f)$ .

**R** Essendo  $\text{Im}(f) = \text{Col}(F)$ , per trovare una base di  $\text{Im}(f)$  basta procedere col metodo degli scarti successivi sull'insieme delle colonne di  $F$ , con l'informazione aggiuntiva che il procedimento può essere arrestato non appena si siano trovati 2 vettori l.i. (perché abbiamo già trovato che  $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ ).

Siccome le prime due colonne risultano già l.i., possiamo fermarci lì e concludere che esse costituiscono una base di  $\text{Im}(f)$ .

## EX

**D** Sia  $f$  l'a.l. corrispondente alla matrice  $F$  dell'Esercizio 2,

$$F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori di  $\lambda \in \mathbb{R}$  il vettore  $\begin{pmatrix} -2 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$ .

**R** Eseguita la riduzione

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \lambda \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 & \lambda^2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 & 4 + \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda - 2 \end{array} \right)$$

possiamo applicare il teorema di Rouché-Capelli ottenendo che c'è compatibilità se e solo se  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ , ossia se e solo se  $\lambda = 1$  o  $\lambda = -2$ .

## EX

## Saper fare: Esercizi

**Esercizio 8:**

**D** Sia

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ y - z \\ x + z \\ 2x + y + z \end{pmatrix} \end{cases}.$$

1. Calcolare  $\dim(\text{Im}(f))$ .
2. Calcolare  $\dim(\text{Ker}(f))$ .
3.  $f$  è iniettiva?
4.  $f$  è suriettiva?
5. Trovare una base per  $\text{Ker}(f)$ .
6. Trovare una base per  $\text{Im}(f)$ .
7. Trovare un vettore  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$  privo di controimmagine attraverso  $f$ .

**Esercizio 8:**

**R**

1.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rank}(F) = 2.$$

2.  $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(F)) = 3 - \text{rank}(F) = 1$ .
3.  $f$  non è iniettiva perché  $\dim(\text{Ker}(f)) \neq 0$ .
4.  $f$  non è suriettiva perché  $\dim(\text{Im}(f)) \neq 4$ .

**Esercizio 8:**

**R**

5.

$$F \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \implies t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Per trovare una base di  $\text{Im}(f)$  basta prendere due colonne l.i. di  $F$ . Per esempio, le prime due.
7. Basta prendere un vettore che non sia c.l. delle prime due colonne di  $F$ .



## TEOREMA CAMBIAMENTO BASE

$F: V \rightarrow V$  endomorfismo

$B, B'$  basi di  $V$

$A_B$  matrice endomorfismo  $F$  rispetto a  $B$

$$A_{B'} = M_{B'}^B A_B M_B^{B'}$$

$$\underbrace{V}^{B'} \xrightarrow{M_B^{B'}} \underbrace{V}^B \xrightarrow{A_B} \underbrace{V}^B \xrightarrow{M_{B'}^B} \underbrace{V}^{B'}$$

**Saper fare:** determinare la matrice associata a un'a.l.  
 $\mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  rispetto a basi non canoniche

**Esercizio 11:**

**D** Sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  associato alla matrice  $F^{\mathcal{E}, \mathcal{E}} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Sia inoltre  $\mathcal{B} := \left( \mathbf{b}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

1. Scrivere  $F^{\mathcal{E}, \mathcal{B}}$ .
2. Scrivere  $F^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ .

**R**

1.

$$F^{\mathcal{E}, \mathcal{B}} = (f(\mathbf{b}_1)_{\mathcal{E}}, f(\mathbf{b}_2)_{\mathcal{E}})$$

$$f(\mathbf{b}_1)_{\mathcal{E}} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} + f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$f(\mathbf{b}_2)_{\mathcal{E}} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$F^{\mathcal{E}, \mathcal{B}} = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

**R**

2. Per scrivere  $F^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$  bisogna esprimere tanto  $f(\mathbf{b}_1)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$  quanto  $f(\mathbf{b}_2)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 7 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \mu_1 = 3 \\ \mu_2 = -2 \end{cases} \end{aligned} \implies F^{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

## MATRICE CAMBIAMENTO BASE

Date le basi  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ , vogliamo determinare la matrice  $M_{B, B'}$  che esprime il passaggio dalla base  $B$  alla base  $B'$ .

Per farlo ci basta esprimere i vettori della base  $B$  come **combinazioni lineari** dei vettori di  $B'$

$$v_1 = a_{11}v'_1 + a_{12}v'_2 + \dots + a_{1n}v'_n$$

$$v_2 = a_{21}v'_1 + a_{22}v'_2 + \dots + a_{2n}v'_n$$

$\vdots$

$$v_n = a_{n1}v'_1 + a_{n2}v'_2 + \dots + a_{nn}v'_n$$

La matrice di passaggio da  $B$  a  $B'$  si ricava disponendo i coefficienti delle combinazioni lineari per colonna in una matrice.

$$M_{B, B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Autovalori, autovettori, diagonalizzazione

## AUTOVETTORE AUTOVALORE

Un **autovettore** per la trasformazione lineare  $L$  è un vettore  $v \neq 0$  che a seguito dell'applicazione di  $L$  **non cambia la sua direzione**, limitandosi ad essere moltiplicato per uno scalare  $\lambda$ , **autovalore**.  
Il vettore può quindi soltanto cambiare modulo e verso.

$T : V \rightarrow V$  endomorfismo su  $K$

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad \forall \vec{v} \neq \vec{0}$$

## AUTOSPAZIO DELL'AUTOVALORE

Spazio **generato dagli autovettori di  $T$**  aventi lo stesso **autovalore  $\lambda$** .

$$E_f(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

$$0_v \in E_f(\lambda)$$

$$\dim(E_f(\lambda)) = n - \text{rank}(A - \lambda I) \leq n$$

## POLINOMIO CARATT.

Il polinomio caratteristico associato ad **un endomorfismo (matrice  $n \times n$ )** fornisce come soluzioni gli **autovalori dell'endomorfismo stesso**.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

## COROLLARIO TEOREMA FONDAMENTALE ALGEBRA

Se la dimensione  $n$  di  $V$  è dispari e  $K = \mathbb{R}$  è il campo dei numeri reali, il polinomio caratteristico ha grado dispari, e quindi ha sempre almeno una radice reale

**E. autovettore (autovalore)  $\Rightarrow (A - \lambda I)$  non è invertibile  $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Poi prendiamo la matrice  $A - \lambda Id$ , dove  $\lambda$  è un'incognita e  $Id$  è la matrice identità

$$A - \lambda Id = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Calcoliamone il determinante, cioè il polinomio caratteristico di  $A$ , applicando la **regola di Sarrus**

$$\det(A - \lambda Id) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8$$

$$(A - Id)\underline{x} = \underline{0}$$

ossia

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dopodiché cerchiamo una base per lo spazio delle soluzioni

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ -y + 2y - y = 0 \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ 0 = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

Abbiamo un'equazione indeterminata. Attribuiamo alla variabile libera ( $y$ ) il ruolo di parametro libero, ponendo  $y = a \in \mathbb{R}$ . Possiamo ora dedurre la generica soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\underline{x} = [x, y, z] = [-a, a, -a]$$

che si scrive, in forma di combinazione lineare

## MATRICI SIMILI

A simile a B se e solo se esiste una matrice P, invertibile, tale che

$$A = PBP^{-1}$$

A, B hanno:

- RANGO UGUALE
- DETERMINANTE UGUALE
- AUTOVETTORI AUTOVALORI COINCIDENTI
- POTENZA MATRICI DIAGONALI (A)

$$A^m = P\Delta^m P^{-1}$$

$$\Delta^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

## MATRICE DIAGONALIZZ.

Una matrice **A** si dice **diagonalizzabile** se esiste una matrice diagonale **D** tale che

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow DP = AP$$

**P.** Matrice diagonalizzante di A

### CN.SUFF PER LA DIAGONALIZZABILITA'

- Numero degli **AUTOVALORI**, compresi di **molteplicità**, sia pari all'ordine della matrice (**n autovalori in  $A^{n \times n}$** )
- **Molteplicità algebrica** degli autovettori coincida con quella geometrica

$$1 \leq m_{\text{geo}}(\lambda) \leq m_{\text{alg}}(\lambda) \leq n$$

$$m_g(\lambda) = n - \text{rank}(A - \lambda Id)$$

### MOLTEPLICITA' ALGEBRICA MOLTEPLICITA' GEOMETRICA

Molteplicità nel **polinomio** caratt.  
**Dimensione** autospazio associato.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \swarrow & & \searrow \\ F = M_f^{\mathcal{E}, \mathcal{E}} & \sim & D = M_f^{\mathcal{B}, \mathcal{B}} \end{array}$$

$f$  è semplice se è associato ad una matrice  $F = M_f^{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$  diagonalizzabile, cosa che avviene se esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{K}^n$  fatta da autovettori di  $F$ , rispetto alla quale l'endomorfismo  $f$  è associato ad una matrice diagonale  $D$ .

## ENDOMORF. SEMPLICE

Un endomorfismo si dice **semplice** se è associato ad una matrice diagonalizzabile, o **esiste una base di autovettori associati alla matrice**

## POTENZA M.DIAGONAL.

$$A^k = T D^k T^{-1}$$

## MATRICE SIMMETRICA

Una matrice simmetrica è **una matrice quadrata** che ha la proprietà di **essere la trasposta di se stessa**.

$$A^T = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

- A. TUTTI AUTOVALORI REALI
- B.  $RK(A) = N.RO( \text{AUTOVALORI} \neq 0 )$
- C. GLI AUTOVETTORI ASSOCIATI AD AUTOVALORI DIVERSI SONO **ORTOGONALI** DUE A DUE, OVVERO IL PRODOTTO **SCALARE E' 0**
- D. LA MATRICE **DIAGONALIZZANTE E' ORTOGONALE**
- E. IL PRODOTTO RIGA PER COLONNA SU SE STESSA RISULTA NELLA **MATRICE IDENTICA**  $A^2 = I$
- F. **DIMENSIONE SPAZIO**  $n \times n = \frac{(n+1)n}{2}$

## MATRICE ORTOGONALE

Una matrice ortogonale è una matrice invertibile **la cui trasposta coincide con la sua inversa**, avente come **DET(A) 1 o -1**

$$GG^T = G^T G = I_n$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

- A. **Una matrice quadrata è ortogonale** se e solo se **le sue colonne formano una base ortonormale** dello spazio euclideo  $R^n$  con l'ordinario prodotto scalare.
- B. **Gli autovalori** reali e complessi hanno **modulo unitario**.

## TEOREMA HAMILTON- CAYLEY

$$A^{n \times n} \text{ su } K \text{ con } p(\lambda)$$

$$\Rightarrow p(A) = 0$$

EX

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$\Rightarrow$

$$p(A) = A^2 - 4A + 3I = 0$$

$$\begin{cases} I = \frac{1}{3}(4A - A^2) = A \frac{1}{3}(4 - A) \\ A^{-1} = \frac{1}{3}(4 - A) \end{cases}$$

## ALGORITMO DI GRAM SCHMIDT

Il procedimento di Gram–Schmidt permette di **costruire una base ortogonale e ortonormale**  $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_N$  a partire da una base generica  $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_N$

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i$  vettori L.I. in uno spazio  $V$

$$\text{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i) = \text{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i) \quad \forall i$$

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \|\mathbf{e}_i\| = 1 \quad \forall i$$

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) - \text{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3), \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|}$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_4) - \text{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_4) - \text{proj}_{\mathbf{u}_3}(\mathbf{v}_4), \quad \mathbf{e}_4 = \frac{\mathbf{u}_4}{\|\mathbf{u}_4\|}$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{v}_k), \quad \mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}$$

## EX

**Esempio 25.2.2.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come già visto nell'Esempio 23.2.2, gli autovalori di  $A$  sono  $-1$  e  $2$  e

$$E_A(-1) = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}), \quad E_A(2) = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}).$$

Per ottenere una matrice ortogonale  $P$  che diagonalizzi  $A$  è necessario determinare tre autovettori  $P_1, P_2, P_3$  ortonormali. A tale scopo basta determinare basi ortonormali in  $E_A(-1)$  e  $E_A(2)$ . Per quanto riguarda  $E_A(2)$  basta andare a scegliere in esso un vettore, ad esempio consideriamo

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Invece il discorso è un po' più complicato in  $E_A(-1)$ . Iniziamo a determinare un vettore, per esempio

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per determinare  $P_3$  cerchiamo  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che i vettori  $P_2$  e

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

siano ortogonali. Si ha che  $\langle P_2, X_\alpha \rangle = (2 + \alpha)/\sqrt{2}$ . Affinché  $\langle P_2, X_\alpha \rangle = 0$  si deve avere che  $\alpha = -2$ , dunque possiamo scegliere

$$P_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice ortogonale cercata è

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$P$  è non speciale e risulta

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## FORMA QUADRATICA

Una forma quadratica è **un polinomio omogeneo di grado 2** in un certo **numero di variabili**.

$$q(\mathbf{v}) = q(v_1, \dots, v_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} v_i v_j,$$

$$q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T A \mathbf{v}$$

**v** **vettore** dello spazio  $V$   
**n** **dimensione** dello spazio  $V$   
**a** **coefficienti** della forma quadratica

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_{1,1}x_1^2 + \dots + a_{1,n}x_1x_n + a_{2,1}x_2x_1 + \dots + a_{2,n}x_2x_n + \dots + a_{n,n}x_n^2.$$

Poiché  $a_{i,j} = a_{j,i}$  e  $x_i x_j = x_j x_i$  per  $i, j = 1, \dots, n$ , segue che

$$(26.1.2) \quad x A^t x = a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + \dots + 2a_{1,n}x_1x_n +$$

$$+ a_{2,2}x_2^2 + 2a_{2,3}x_2x_3 + \dots + a_{n,n}x_n^2.$$

Abbiamo verificato sopra che ogni matrice simmetrica  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  definisce una forma quadratica reale  $q$  in  $n$  variabili. Vale anche il viceversa. Infatti, data la forma quadratica

$$q(x_1, \dots, x_n) = q_{1,1}x_1^2 + q_{1,2}x_1x_2 + \dots + q_{1,n}x_1x_n + q_{2,2}x_2^2 + q_{2,3}x_2x_3 + \dots + q_{n,n}x_n^2,$$

consideriamo la matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n,n}$  definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} q_{i,i} & \text{se } i = j, \\ q_{i,j}/2 & \text{se } i < j, \\ q_{j,i}/2 & \text{se } i > j. \end{cases}$$

### EX

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1x_1 & 2x_1 \\ 3x_2 & 4x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 =$$

$$x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2^2$$

## DEFINIZIONE FORMA QUADRATICA

$Q(X)$  è *definita* :

A. Positiva  $\forall x \in \mathfrak{R}^n \Rightarrow Q(x) > 0$

B. Semipositiva  $\forall x \in \mathfrak{R}^n \Rightarrow Q(x) \geq 0$

C. Indefinita  $\exists x, y \in \mathfrak{R}^n \Rightarrow Q(x) > 0, Q(y) < 0$

## LEGAME DEF. AUTOVALORI

**Proposizione 26.2.3.** Sia data la matrice diagonale  $D \in \mathbb{R}^{n,n}$  con entrate diagonali  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Allora:

- i)  $D$  è definita positiva se e solo se  $\lambda_i > 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ;
- ii)  $D$  è semidefinita positiva se e solo se  $\lambda_i \geq 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ;
- iii)  $D$  è definita negativa se e solo se  $\lambda_i < 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ;
- iv)  $D$  è semidefinita negativa se e solo se  $\lambda_i \leq 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ;
- iv)  $D$  è indefinita se e solo se esistono  $i, j = 1, \dots, n$  tali che  $\lambda_i > 0$  e  $\lambda_j < 0$ .  $\square$

## SEGNATURA DI UNA MATRICE

La segnatura è una terna di numeri che fornisce delle informazioni su una matrice simmetrica o su un prodotto scalare.

$$(i_+, i_-, i_0)$$
$$\begin{cases} i_+ = n^\circ & \lambda > 0 \\ i_- = n^\circ & \lambda < 0 \\ i_0 = n^\circ & \lambda = 0 \end{cases}$$

## REGOLA DI CARTESIO

Per il criterio di Cartesio, ogni variazione tra coefficiente e successivo corrisponde ad una soluzione positiva, ad ogni permanenza una soluzione negativa. Se il polinomio non è omogeneo bisogna raccogliere l'incognita, altrimenti procedere normalmente.

# Coniche e quadriche

## CONICA

Con conica, si intende genericamente una curva piana che sia luogo dei punti ottenibili intersecando **la superficie di un cono circolare con un piano**.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

$e < 1$       **IPERBOLE**  
 $0 < e < 1$       **PARABOLA**  
 $e = 1$       **CIRCONFERENZA**  
 $e > 1$       **IPERBOLE**

$\Delta = b^2 - 4ac$   
 $\Delta < 0$       **ELLISSE**  
                  $A=C, B=0$  **CIRCONFERENZA**  
 $\Delta = 0$       **PARABOLA**  
 $\Delta > 0$       **IPERBOLE**

## DEGENERE

Unione di 2 rette nel piano.

## CONICHE COME QUADRICHE

$$\gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A & a_{13} \\ A & A & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x^2 & \frac{xy}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{xy}{2} & y^2 & \frac{y}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{y}{2} & f \end{pmatrix}$$
$$\gamma = (x, y, 1) \cdot B(q) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

I coefficienti nella matrice completa **devono essere dimezzati**, tranne quelli sulla diagonale.

## CARATTERIZZAZIONE

### A. $\text{DET}(B) = 0$ CONICA DEGENERE

$\text{RK}(B) = 1$  2 RETTE

$\text{RK}(B) = 2$  2 RETTE COINCIDENTI

### B. $\text{DET}(B) \neq 0$ CONICA NON DEGENERE

$\text{DET}(A) < 0$  **IPERBOLE** (2 AUTOVALORI DISCORDI). **I**

**IP.EQUILATERA** SE  $a_{11} = -a_{22}$

$\text{DET}(A) = 0$  **PARABOLA** (1 AUTOVALORE NULLO) **P**

$\text{DET}(A) > 0$  **ELLISSE** (2 AUTOVALORI CONCORDI). **E**

**CIRCONFERENZA** SE  $a_{12} = 0, a_{11} = a_{22}$



## ESEMPI CONICHE

**Esempio 1:** consideriamo la conica definita dall'equazione

$$x^2 + 3x + 4y^2 + 4xy + 6y - 18 = 0$$

La matrice A dei coefficienti è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 & 3 \\ \frac{3}{2} & 3 & -18 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è uguale a zero. Siamo quindi di fronte ad una conica degenere. Ancora, essendo il rango della matrice A pari a 2, abbiamo una conica semplicemente degenere.

**Esempio 2:** prendiamo la conica data da

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - 15x_2^2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_3^2 = 0$$

La sua matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -15 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Essendo  $\det(A) = -9 \neq 0$ , la conica è non degenere. Calcoliamo quindi:

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -15 \end{bmatrix} = -16 < 0$$

Siamo quindi davanti ad un'iperbole.

## ROTOTRASL. CONICA

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

La nuova conica quindi sarà

$$\gamma': (x', y', 1) B' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & u \\ \sin \varphi & \cos \varphi & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi$ : il semiasse **positivo delle  $x'$**  formi un angolo  $\varphi$  (misurato in senso antiorario) con il **semiasse positivo delle  $x$**

## CENTRO CONICA

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \neq 0$$

$\exists$  Centro della conica  $\gamma$

$$\begin{cases} x = X + u \\ y = Y + v \end{cases}$$

Impongo che:

$$\begin{cases} \text{coeff}(x) = 0 \\ \text{coeff}(y) = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2uA + 2Bv + d = 0 \\ 2uB + 2Cv + e = 0 \end{cases}$$

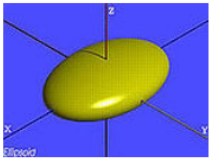
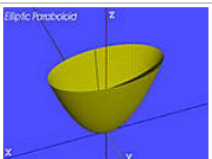
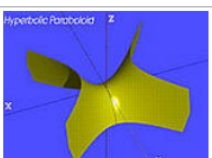
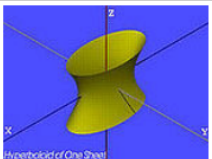
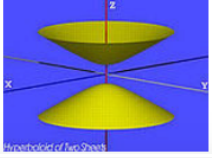
## QUADRICA

Una quadrica è **una (iper-)superficie di uno spazio D-dimensionale** sui complessi o sui reali rappresentata da un'equazione polinomiale del secondo ordine nelle variabili spaziali

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Consultare allegato sulle quadriche

Quadriche non degeneri		
<b>Ellissoide</b>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
<b>Sferoide</b> (caso particolare di ellissoide)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$	
<b>Sfera</b> (caso particolare di sferoide)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$	
<b>Paraboloide ellittico</b>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$	
Paraboloide circolare (caso particolare di paraboloide ellittico)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z}{c} = 0$	
<b>Paraboloide iperbolico</b>	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0$	
<b>Iperboloide ad una falda</b> (iperboloide iperbolico)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
<b>Iperboloide a due falde</b> (iperboloide ellittico)	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	

# Geometria dello spazio

## PIANO

$$ax + by + cz + d = 0$$

### VETTORE DIRETTORE

Vettore **perpendicolare** al piano costituito dalla terna  $(a, b, c)$

### EQUAZIONI PARAMETRICHE

I vettori **v** e **w** sono **direzioni del piano**, e **devono essere linearmente indipendenti**: altrimenti costituiscono una retta

$$\pi : \begin{cases} x = x_O + tv_1 + sw_1 \\ y = y_O + tv_2 + sw_2 \\ z = z_O + tv_3 + sw_3 \end{cases}$$

### PIANO PER 3 PUNTI NON ALLINEATI

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$$

Il prodotto scalare per due vettori mi dà un versore normale al piano. Imponendo il passaggio per il terzo punto ho l'ultima condizione.

### PIANO DATO DIRETTORE E P.TO

Il direttore determina **a, b, c** mentre **d** è determinato dalla cond. di passaggio per il punto dato.

### POSIZIONE TRA DUE PIANI

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix} \quad (A|B) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

A.  $RK(A) = 2 = RK(A|B)$  INCIDENTI (RETTA)

B.  $RK(A) = 1$

$RK(A|B) = 2$  PIANI PARALLELI

$RK(A|B) = 1$  PIANI COINCIDENTI

## RETTA

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \quad r: \begin{cases} x=x_p+tv_1 \\ y=y_p+tv_2 \\ z=z_p+tv_2 \end{cases}$$

$$r: p(t) = A + t(B - A)$$

### INDIPENDENZA LINEARE EQ

Perchè rappresentino una retta, le equazioni devono essere **linearmente indipendenti**. altrimenti:

$\exists k \in \mathbb{R}$  tale che  $a = ka'$  ;  $b = kb'$  ;  $c = kc'$  ;  $d = kd'$

### RETTA DATA DIREZIONE E PUNTO

$$v = (a, b, c) \quad P = (x_p, y_p, z_p)$$

$$\frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{b}$$

$$\begin{cases} \frac{x-x_p}{a} = \frac{y-y_p}{b} \\ \frac{y-y_p}{b} = \frac{z-z_p}{b} \end{cases}$$

### POSIZIONE RECIPROCA DI DUE RETTE

**SGHEMBE:** appartengono a piani diversi  $\det(A) \neq 0$

**COMPLANARI** appartengono allo stesso piano  $\det(A) = 0$

**Studio i vettori** (indicenti, parallele, co-incidenti)

$$\begin{matrix} v_r = (v_1, v_2, v_3) & P_r = (x_r, y_r, z_r) \\ u_s = (u_1, u_2, u_3) & P_s = (x_s, y_s, z_s) \end{matrix} \quad A = \begin{pmatrix} x_r - x_s & y_r - y_s & z_r - z_s \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$$

### POSIZIONE RECIPROCA RETTA-PIANO

**INDICENTI** Unica soluzione al sistema  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B) = 3$

**PARALLELI** Sistema incompatibile  $\text{rk}(A) \neq \text{rk}(A|B)$

**r GIACE SU pi** Infinite soluzioni  $\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B) = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (A|B) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

## SFERA

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$$

$$C = \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right), r = \sqrt{x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 - d}$$

## PIANO TANGENTE AD UNA SFERA IN UN PUNTO

$$v = (x_p - x_c, y_p - y_c, z_p - z_c)$$

$$\pi : v_1x + v_2y + v_3z + d$$

## VARIE

### PROIEZIONE V SU PI

$$\vec{v}_\pi = \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}_\pi}{\|\vec{n}_\pi\|^2} \vec{n}_\pi$$

### SIMMETRICO V SU PI

$$\vec{v}_s = \vec{v} - 2 \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}_\pi}{\|\vec{n}_\pi\|^2} \vec{n}_\pi$$

### DISTANZA PUNTO DA PIANO

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_p + by_p + cz_p + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

### DISTANZA PUNTO RETTA

A. Equazione del piano  $\pi$  per PO ortogonale ad r;

$$\pi : (x - x_p)v_{r1} + (y - y_p)v_{r2} + (z - z_p)v_{r3} = 0$$

B. Punto di intersezione  $r \times \pi = H$

C. Applicare la distanza fra i due punti e calcolare  $d(PO, H)$

### DISTANZA PIANI PARALLELI

$$d(\pi_2, \pi_1) = |d(\pi_1, O) - d(\pi_2, O)| =$$

$$= \left| \frac{d_{\pi_1}}{\sqrt{a_{\pi_1}^2 + b_{\pi_1}^2 + c_{\pi_1}^2}} - \frac{d_{\pi_2}}{\sqrt{a_{\pi_2}^2 + b_{\pi_2}^2 + c_{\pi_2}^2}} \right|$$

# Equazioni Lineari

## SISTEMI EQUIVALENTI

Due sistemi di equazioni (non necessariamente lineari) si dicono equivalenti se hanno lo **stesso insieme di soluzioni**.

## TEOREMA ROUCHE CAPELLI

Siano  $A \in K^{m,n}, B \in K^{m,1}, K = R \vee C$  e si considerino i sistemi

1.  $AX = B$
2.  $AX = 0_{m,1}$

Allora :

- A. Il Sistema 1 è compatibile se e solo se  $rk(A) = rk(A|B)$ .
- B. Se il Sistema 1 è compatibile allora le sue soluzioni dipendono da  $n - rk(A)$  parametri liberi.

- C. Se il sistema 1 è compatibile e  $x_0 \in K^{n,1}$  è una sua soluzione fissata, allora le sue soluzioni  $x \in K^{n,1}$  sono tutte e sole le matrici della forma  $X = X_0 + Y$  dove  $Y \in K^{n,1}$  appartiene all'insieme delle soluzioni del sistema 2

$$\begin{cases} \infty^{n-q} \\ q = r(A) = r(A|B) \\ n = colonne(A) \end{cases}$$
$$\text{Sol}(A|b) = x_0 + \text{Sol}(A|0)$$

Se esistono soluzioni, queste formano un sottospazio affine di  $K^n$  di **dimensione  $n - rk(A)$**

$$\text{Det}(A) \neq 0 \Rightarrow rk(AB) = rk(A) = \max(rk(A))$$

## DETERMINANT.

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

## DETERMINANTE 3x3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

## PROPRIETA'

- Se tutti gli **elementi di una riga (o colonna) sono nulli**, allora  $\det(A) = 0$
- Se **A ha due righe (o colonne) eguali**, o proporzionali, allora  $\det(A) = 0$
- Se una riga (o colonna) è **combinazione lineare di due o più altre righe (o colonne) a essa parallele**, allora  $\det(A) = 0$

## TEOREMA DI CRAMER

$$Ax = c$$

Dove **A** è una matrice quadrata ed invertibile  $n$  e **x**, **c** sono due vettori. Per il teorema di **Rouché-Capelli** asserisce che il sistema ha **esattamente una soluzione**.

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

## PROPOSIZIONI

**Proposizione 6.2.4.** Sia  $A \in k^{n,n}$ ,  $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Valgono le seguenti proprietà.

- (DC1) Se  $A'$  è ottenuta da  $A$  sommando ad una colonna un multiplo di un'altra,  $\det(A') = \det(A)$ .
- (DC2) Se  $A'$  è ottenuta da  $A$  moltiplicando una colonna per una costante  $\alpha \in k$ ,  $\det(A') = \alpha \det(A)$ .
- (DC3) Se  $A'$  è ottenuta da  $A$  scambiando due colonne diverse,  $\det(A') = -\det(A)$ .  $\square$

## EQ LINEARI METODO INVERSA

$$Ax = B \Leftrightarrow x = A^{-1}B$$

**D** Risolvere l'equazione matriciale  $AX = B$  con  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**R** A questo punto basta moltiplicare la matrice  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  per la matrice  $B$ :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tale soluzione soddisfa effettivamente l'equazione matriciale, com'è facile verificare (prova) effettuando il prodotto  $AX$  e constatando che uguaglia  $B$ .

# MATLAB - Calcolo numerico

## Introduzione e sintassi

### VARIABILI

$n_{var} = \text{valore}$

- Non vi è **distinzione tra i tipi di variabile**
- Costanti predefinite: **pi**, **i**, **j** (costanti immaginarie e pigreco)

Variabile	Significato
<b>ans</b>	variabile temporanea che contiene il risultato più recente
<b>i, j</b>	unità immaginaria
<b>pi</b>	$\pi$ , 3.14159265...
<b>eps</b>	<i>epsilon</i> di macchina
<b>realmax</b>	massimo numero di macchina positivo
<b>realmin</b>	minimo numero di macchina positivo
<b>Inf</b>	$\infty$ , ossia un numero maggiore di <b>realmax</b> oppure il risultato di 1/0
<b>NaN</b>	Not a Number (per esempio, il risultato di 0/0)

### EPSILON DI MACCHINA

In informatica l'epsilon di macchina è il più piccolo numero  $\epsilon$ , appartenente a un dato insieme **F di numeri in floating point**, diverso in valore assoluto da zero, che sommato all'unità, dà un risultato diverso da 1

$$a - b < \epsilon$$

### COMANDI D'AVVIO

Comando	Significato
<b>help</b>	per visualizzare tutti gli argomenti presenti
<b>help arg</b>	per visualizzare informazioni su arg
<b>doc arg</b>	per visualizzare dettagliate informazioni su arg
<b>clc</b>	per cancellare il contenuto della finestra di lavoro
<b>;</b>	per non visualizzare il risultato di un'istruzione
<b>...</b>	per continuare a scrivere un'istruzione nella riga successiva
<b>who</b>	per visualizzare le variabili poste in memoria
<b>whos</b>	per visualizzare informazioni sulle variabili poste in memoria
<b>clear</b>	per cancellare tutte le variabili dalla memoria
<b>clear var1 var2</b>	per cancellare le variabili <b>var1</b> e <b>var2</b> dalla memoria

### FORMATI OUTPUT

Type	Result	Example
short	Scaled fixed point format, with 5 digits	3.1416
long	Scaled fixed point format, with 15 digits for double; 7 digits for single.	3.14159265358979
short e	Floating point format, with 5 digits.	3.1416e+000
long e	Floating point format, with 15 digits for double; 7 digits for single.	3.141592653589793e+000
short g	Best of fixed or floating point, with 5 digits.	3.1416
long g	Best of fixed or floating point, with 15 digits for double; 7 digits for single.	3.14159265358979
short eng	Engineering format that has at least 5 digits and a power that is a multiple of three	3.1416e+000
long eng	Engineering format that has exactly 16 significant digits and a power that is a multiple of three	3.14159265358979e+000



## VETTORI RIGA E COLONNA

**VETTORE RIGA.** niente!  
**VETTORE COLONNA.** ;

$$w_{riga} = [1 \ 2 \ 3] \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$$

$$w_{colonna} = [1; 2; 3;] \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$$

## EQUISPAZIO

### VETTORE RIGA EQUISPAZIATO

$$v = [a:p:b]$$

$\begin{cases} a: \text{valore iniziale} \\ b: \text{valore finale} \\ p: \text{passo} \end{cases}$

### VETTORE RIGA EQUISPAZIATO

$v = \text{ linspace}(a,b,n)$  genera **n vettori** equispaziati compresi tra gli **estremi a,b**

$\text{logspace}(\exp_1, \exp_2, \exp_{gap})$  genera **n vettori** equispaziati compresi tra gli **estremi  $10^a, 10^b$**

## OPERAZIONI SUI VETTORI

COMANDO	DESC
$v^{1 \times n} \Rightarrow v(n) = v_n$	ACCEDERE ALLA N-ESIMA COMPONENTE
$v^{1 \times n} \Rightarrow \text{size}(v) = n$	LUNGHEZZA ATTUALE DEL VETTORE
$v^{1 \times n} \vee n \times 1 \Rightarrow \text{length}(v) = \max(\text{size}(v))$	MASSIMA LUNGHEZZA DEL VETTORE
$\text{zeros}(n,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{n \times 1}$ $\text{zeros}(1,n) = (0 \dots 0)^{1 \times n}$ $\text{zeros} \Rightarrow v_i = 0$ $\text{ones} \Rightarrow v_i = 1$	VETTORI RIGA/COLONNA RIEMPITI DI 0/1
$v^i = v^t$	VETTORE TRASPOSTO
$\ v\  = \text{norm}(v) = \text{norm}(v,2)$	NORMA DEL VETTORE EQUIVALENTE ALLA NORMA 2
$v \cdot w = \text{dot}(v,w)$	PRODOTTO SCALARE
$v \cdot * w = (v_1 w_1, \dots, v_n w_n)$	PRODOTTO COMPONENTE PER COMPONENTE
$z = [v \ w]$	CONCATENAZIONE VETTORI
$z(i) = []$	ELIMINARE I-ESIMA COMPONENTE
$v = [a_1, \dots, a_n]$ $w = [b_1, \dots, b_m]$ $v(\text{end} - k : \text{end}) = w$	SOSTITUIRE ULTIME K COMPONENTI DEL VETTORE V CON QUELLE DI W
$\text{sort}(v)$	ORDINA IL VETTORE IN TERMINI CRESCENTI
$A = [r_1; r_2; \dots; r_n]$ $A = [1 \ 2 \ 3; 0 \ 0 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	INPUT DI UNA MATRICE TRAMITE I VETTORI RIGA
$I_n = \text{eye}(n)$	MATRICE IDENTICA
$\text{rand}([n \ m])$	MATRICE CASUALE
$\text{diag}(v)$ $\text{diag}(v,k)$	CREA IL VETTORE DI ELEMENTI SULLA K DIAG OPPURE CREA UNA MATRICE AVETE PER DIAGONALE GLI ELEMENTI DEL VETTORE

Sia  $A = \text{eye}(4)$  e  $B = \text{rand}(2)$ . Per sostituire alle ultime due righe e colonne di  $A$  la matrice  $B$ , scriviamo

- $A = \text{eye}(4)$ ;  $B = \text{rand}(2)$ ;
- $A(3:4, 3:4) = B$ ;

Per eliminare da  $A$  la terza colonna usiamo il vettore vuoto  $[]$ :

- $A = \text{rand}(4)$ ;
- $A(:, 3) = []$ ;

Infine, per concatenare due matrici usiamo la sintassi (attenzione alle dimensioni!)

- $A = \text{eye}(3, 2)$ ;  $B = \text{zeros}(3, 4)$ ;
- $C = [A, B]$ ;

## ARRAY DIMENSIONS

Array Dimensions

<code>length</code>	Length of largest array dimension
<code>ndims</code>	Number of array dimensions
<code>numel</code>	Number of array elements
<code>size</code>	Array dimensions
<code>height</code>	Number of table rows
<code>width</code>	Number of table variables
<code>iscolumn</code>	Determine whether input is column vector
<code>isempty</code>	Determine whether array is empty
<code>ismatrix</code>	Determine whether input is matrix
<code>isrow</code>	Determine whether input is row vector
<code>isscalar</code>	Determine whether input is scalar
<code>isvector</code>	Determine whether input is vector

## PLOTTING

COMANDO	DESC
$f = @(x, y, \dots, z) \text{'expression'}$ ;	DEFINIZIONE DI UNA FUNZIONE
$f = \text{inline}(\text{'(sin(x)+x).^2', 'x'})$	DEFINIZIONE FUNZIONE INLINE
$fplot(\text{function}, \text{interval})$ ;	DISEGNA UNA FUNZIONE IN UN INTERVALLO
$plot(x, y)$ ;	PLOTTA DUE VETTORI SU X-Y
$\text{semilogx}(x, y)$ ; $\text{semilogy}(x, y)$ ; $\text{loglog}(x, y)$ ;	PLOTTA DUE VETTORI IN SCALE SEMI/TOTALMENTE LOGARITMICHE

Tabella 11. Alcune possibili opzioni per i comandi `plot` e `fplot`.

Colore	Significato	Simbolo	Significato	Linea	Significato
w	bianco	.	punto	-	linea continua
y	giallo	o	circoletto	:	linea punteggiata
r	rosso	x	per	-.	linea tratto-punto
g	verde	+	più	--	linea tratteggiata
b	blu	*	asterisco		
k	nero	s	quadrato		

Tabella 12. Alcuni possibili comandi per commentare un grafico.

Comando	Azione
<code>title</code>	inserisce un titolo nel grafico
<code>xlabel</code>	inserisce un nome per l'asse $x$
<code>ylabel</code>	inserisce un nome per l'asse $y$
<code>grid</code>	inserisce una griglia sugli assi $x$ ed $y$
<code>legend</code>	inserisce una legenda per identificare rappresentazioni diverse
<code>text</code>	inserisce una stringa di testo in una specificata posizione
<code>gtext</code>	inserisce una stringa di testo in una posizione individuata tramite mouse

## COSTRUTTI BASE

```
for contatore = start:passo:end
    istruzione
    ...
    istruzione
end

while (condizione==true)
    istruzione
    ...
    aggiornamento condizione
end

if (condizione1==true)
    istruzione1
    ...
elseif (condizione2==true)
    istruzione 2
    ...
else
    istruzione 3
    ...
end
```

## OPERAZIONI

+ - \* / ^

### OPERAZIONI PUNTUALI

Possono essere utilizzate premettendo . (punto) all'operazione di (\*/^)

Tabella 10. Operazioni puntuali in MATLAB.

Operazione	Azione
$z=x.*y$	genera il vettore riga (colonna) $z = \{z_i\}_{i=1,\dots,n}$ , con $z_i = x_i * y_i$
$z=x./y$	genera il vettore riga (colonna) $z = \{z_i\}_{i=1,\dots,n}$ , con $z_i = x_i / y_i$
$z=x.^y$	genera il vettore riga (colonna) $z = \{z_i\}_{i=1,\dots,n}$ , con $z_i = x_i^{y_i}$
$z=x.^e$	genera il vettore riga (colonna) $z = \{z_i\}_{i=1,\dots,n}$ , con $z_i = x_i^e$
$C=A.*B$	genera la matrice $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , con $c_{ij} = a_{ij} * b_{ij}$
$C=A./B$	genera la matrice $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , con $c_{ij} = a_{ij} / b_{ij}$
$C=A.^B$	genera la matrice $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , con $c_{ij} = a_{ij}^{b_{ij}}$
$C=A.^e$	genera la matrice $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , con $c_{ij} = a_{ij}^e$

## OPERATORI LOGICI

OPERATORE
& and(A,B)
 or(A,B)
~ not(A)
xor xor(A,B)

## DICHIARAZIONE FUNZIONE

$function [y_1, y_2, \dots, y_n] = nome\_function(x_1, x_2, \dots, x_m)$

**Y** Valori OUTPUT

**X** Valori INPUT

**nome\_function** Nome della funzione

### PERIMETRO, AREA E DIAGONALE RETTANGOLO

$function [A, p, d] = rettangolo(a, b)$

$A = a*b;$

$p = 2*(a+b);$

$d = \sqrt{a^2 + b^2};$

## FUNZIONI PREDEFINITE

Funzione	Significato
sin	seno
cos	coseno
asin	arcoseno
acos	arcocoseno
tan	tangente
atan	arcotangente
exp	esponenziale
log	logaritmo naturale
log2	logaritmo in base 2
log10	logaritmo in base 10
sqrt	radice quadrata
abs	valore assoluto o modulo
real	parte reale
imag	parte immaginaria
sign	funzione segno
factorial	fattoriale
round	arrotonda all'intero più vicino
floor	arrotonda per difetto all'intero più vicino
ceil	arrotonda per eccesso all'intero più vicino
chop(x,t)	arrotonda x a t cifre significative

## OPERAZIONI V-A ESTESE

Tabella 7. Alcune funzioni predefinite in MATLAB agenti su un vettore x.

Comando	Azione
a=sum(x)	genera lo scalare $a = \sum_{i=1}^n x_i$
a=prod(x)	genera lo scalare $a = \prod_{i=1}^n x_i$
a=max(x)	genera lo scalare $a = \max_i x_i$
a=min(x)	genera lo scalare $a = \min_i x_i$
a=norm(x)	genera lo scalare $a = \ x\ _2$
a=norm(x,1)	genera lo scalare $a = \ x\ _1$
a=norm(x,inf)	genera lo scalare $a = \ x\ _\infty$
A=diag(x)	genera la matrice diagonale $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , con $a_{ii} = x_i$

Tabella 8. Alcuni comandi per generare e manipolare matrici.

Comando	Azione
A=[]	genera la matrice vuota A
A'	genera la matrice trasposta di A
A=eye(n)	genera la matrice identità $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , con $a_{ij} = \delta_{ij}$
A=zeros(n,m)	genera la matrice $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$ , con $a_{ij} = 0$
A=ones(n,m)	genera la matrice $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$ , con $a_{ij} = 1$
A=rand(n,m)	genera la matrice $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$ , con $0 < a_{ij} < 1$ pseudo-casuali
A=hilb(n)	genera la matrice di Hilbert $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , con $a_{ij} = 1/(i+j-1)$
A=vander(x)	genera la matrice di Vandermonde $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ , con $a_{ij} = x_i^{n-j}$
A(r,c)	estrae gli elementi di A appartenenti all'intersezione delle righe e delle colonne specificate in r e in c rispettivamente
A(r,c)=C	assegna agli elementi di A (i cui indici di riga e di colonna sono specificati in r e in c) i valori definiti in C rispettivamente
A(r,c)=[]	rimuove gli elementi di A (i cui indici di riga e di colonna sono specificati in r e in c)
A([i j],c)=A([j i],c)	scambia gli elementi delle righe i e j di A appartenenti alle colonne specificate in c
A(r,[i j])=A(r,[j i])	scambia gli elementi delle colonne i e j di A appartenenti alle righe specificate in r

## MAX,MIN

Se il valore in ingresso è una matrice restituiscono **dei vettori riga** **contenenti l'elemento maggiore/minore di ogni colonna.**

## OPERATORI RELAZIONALI

Tabella 13. Operatori relazionali in MATLAB.

Operatore	Significato
<	minore
>	maggiore
<=	minore o uguale
>=	maggiore o uguale
==	uguale
~=	non uguale

## ALGEBRA LINEARE

Tabella 16. Algebra lineare.

Function	Scopo
<code>lu</code>	genera la fattorizzazione di Gauss con pivoting parziale
<code>chol</code>	genera la fattorizzazione di Choleski
<code>qr</code>	genera la fattorizzazione QR
<code>x=A\b</code>	risolve il sistema lineare $Ax = b$
<code>cond(A)</code>	calcola il numero di condizionamento spettrale (in norma 2) di $A$
<code>cond(A,1)</code>	calcola il numero di condizionamento in norma 1 di $A$
<code>cond(A,inf)</code>	calcola il numero di condizionamento in norma $\infty$ di $A$
<code>rcond(A)</code>	calcola il reciproco del numero di condizionamento in norma 1 di $A$
<code>rank(A)</code>	calcola il rango di $A$
<code>det(A)</code>	calcola il determinante di $A$
<code>inv(A)</code>	calcola l'inversa di $A$
<code>eig</code>	calcola gli autovalori e gli autovettori di $A$

## INTERPOLAZIO NE

Tabella 17. Polinomi, funzioni e approssimazione.

Function	Scopo
<code>polyval</code>	valuta un polinomio
<code>f=inline('espressione','x_1',...,'x_n')</code>	definisce la funzione $f(x_1, \dots, x_n) = \text{espressione}$
<code>y=f(x_1, \dots, x_n)</code>	valuta la funzione $y = f(x_1, \dots, x_n)$ definita mediante <code>inline</code>
<code>y=feval(f,x_1, \dots, x_n)</code>	valuta la funzione $y = f(x_1, \dots, x_n)$ definita mediante <code>inline</code> oppure mediante una function
<code>polyfit</code>	calcola i coefficienti del polinomio interpolante oppure approssimante nel senso dei minimi quadrati
<code>spline</code>	valuta una spline cubica interpolante

# Aritmetica e errori

## RAPPRESENTAZIONE NUMERI MACCHINA

Un generico valore  $a$  può essere rappresentato nel calcolatore tramite la **notazione a virgola mobile**

$$a = (-1)^s m_{antissa} B^e$$
$$\begin{cases} s \in \{0, 1\} \\ (m_{antissa} \in \mathbb{R}) \geq 0 \\ q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

### SE A E' UN NUMERO REALE

La prima cifra della mantissa, dopo la virgola, deve essere **diversa dallo zero**.  $B^{-1} \leq m_{antissa} < 1$

Un numero non è quindi altro che una **terna di valori**  
 $numero = f(s, m, e)$

### ESEMPIO

Dato  $a=15$ ,  $B=10 \Rightarrow$

$$15 = (-1)^s m N^e$$

$$\begin{cases} s = 0 \\ m = 0.15 \Rightarrow a = 1 \cdot 0.15 \cdot 10^2 = 15 \\ e = 2 \end{cases}$$

## VALORI PARTICOLARI FLOATING POINT

### LIMITE NELLA MEMORIZZAZIONE

$$\begin{cases} L \leq e \leq U \\ L < 0 \\ U > 0 \\ nro(m_{antissa}) < t \end{cases}$$

### ESPONENTE NORMALIZZATO

$$e^* = e - L$$

### VALORI PARTICOLARI ESPONENTE NORMALIZZATO

$$e^* = 0 \Leftrightarrow 0$$

$$e^* = U - L \Leftrightarrow Inf$$

## INSIEME DEI NUMERI MACCHINA

Insieme dei **numeri rappresentabili** sul calcolatore.

$$F = \{0\} \cup \{(-1)^e 0.a_1 a_2 \dots a_t \cdot B^e, \quad 0 \leq a_i < N, \\ a_1 \neq 0, \quad L \leq e \leq U\}$$

## RAPPR.BILITA' NUMERI MACCHINA

### ESEMPIO

$$R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

può accadere che, pur essendo  $x_1$  e  $x_2$  rappresentabili,  $x_1^2$  e/o  $x_2^2$  non lo siano. In questo caso si può ovviare al problema, calcolando  $R$  come

$$R = \begin{cases} |x_1| \sqrt{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}, & \text{se } |x_1| > |x_2| \\ |x_2| \sqrt{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 1}, & \text{se } |x_2| > |x_1| \end{cases}$$

### APPROX.

$$R = \begin{cases} \text{Troncamento} \\ \text{Arrotondamento} \end{cases} \begin{cases} m_{ant} = 0.a_1a_2a_3\dots a_t \\ \text{trunc}(m_{ant} = m_{ant} + \frac{1}{2}B^{-t}, t) \end{cases}$$

### TRONCAMENTO

Elimino le cifre dopo la **t-esima**

### ARROTONDAMENTO

Aggiungo il fattore  $\frac{1}{2}B^{-t}$  e **tronco alla t-esima** cifra

### ERRORI DI APPROX.

#### ERRORE ASSOLUTO

Si definisce **errore di arrotondamento** oppure **errore di roundoff**, l'errore che si commette quando si sostituisce il **numero reale a** con il corrispondente numero di macchina  $\tilde{a}$ .

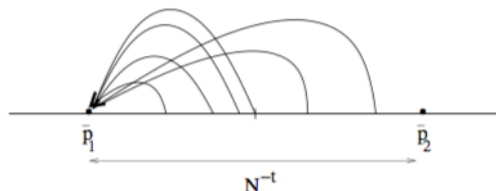
$$e_a = |a - \tilde{a}|$$

#### ERRORE RELATIVO

$$e_r = \frac{|a - \tilde{a}|}{|a|}$$

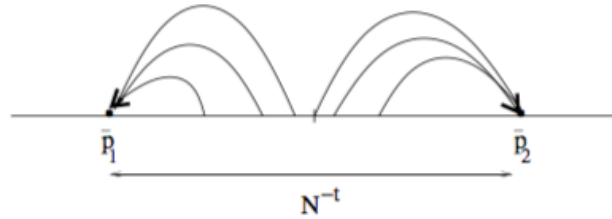
### ERRORI ASSOCIATI ALL'APPROX.

#### ERRORE TRONCAMENTO



Date due rappresentazioni **P1,P2** del numero **P**, esse differiscono dal numero reale seguendo la legge riportata.

## ERRORE ARROTONDAMENTO



Date due rappresentazioni **P1, P2** del numero **P**, esse differiscono dal numero reale seguendo la legge riportata in seguito.

## ERRORI

$$e_a = |a - \bar{a}| = \begin{cases} < N^{e-t} & \text{arrotondamento} \\ \leq \frac{1}{2} N^{e-t} & \text{troncamento} \end{cases}$$

$$e_r = \frac{|a - \bar{a}|}{|a|} \leq \frac{|a - \bar{a}|}{N^{e-1}} = \begin{cases} < N^{1-t} & \text{arrotondamento} \\ \leq \frac{1}{2} N^{1-t} & \text{troncamento} \end{cases}$$

Risulta così definita la **precisione di macchina eps**

$$eps = \begin{cases} N^{1-t} & \text{arrotondamento} \\ \frac{1}{2} N^{1-t} & \text{troncamento} \end{cases}$$

Determinando una **relazione fondamentale per i floating point**

$$\bar{a} = a(1 + \varepsilon) \Rightarrow |\varepsilon| \leq eps$$

## OPERAZIONI MACCHINA

Ogni macchina rappresenta il risultato dell'operazione come un'**ulteriore numero macchina**, con **mantissa espansa di 3 bit**, che viene **successivamente approssimato** con una delle 2 tecniche.

$$|\varepsilon_o| \leq eps$$

$$\bar{a}_1 \oplus \bar{a}_2 = \overline{\bar{a}_1 + \bar{a}_2} = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2)(1 + \varepsilon_{\oplus})$$

$$\bar{a}_1 \ominus \bar{a}_2 = \overline{\bar{a}_1 - \bar{a}_2} = (\bar{a}_1 - \bar{a}_2)(1 + \varepsilon_{\ominus})$$

$$\bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2 = \overline{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2} = (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2)(1 + \varepsilon_{\otimes})$$

$$\bar{a}_1 \oslash \bar{a}_2 = \overline{\bar{a}_1 / \bar{a}_2} = (\bar{a}_1 / \bar{a}_2)(1 + \varepsilon_{\oslash})$$

Per le operazioni di macchina rimane **valida la proprietà commutativa**, ma **non valgono proprietà associativa e distributiva**.



## ESPRESSIONI SIMILI

Due **generiche rappresentazioni**  $e1, e2$  saranno considerate **simili** nel calcolatore se e solo se

$$\frac{|e1 - e2|}{|e1|} \approx eps$$

### ESEMPIO

Fissato  $N = 10$ ,  $t = 5$  e tecnica di arrotondamento ii), le espressioni 0.99999 e 1 sono equivalenti nell'aritmetica fissata, poiché  $|1 - 0.99999| = 0.1 \cdot 10^{-4} \leq eps \equiv 0.5 \cdot 10^{-4}$ .

## APPROX. IN MATLAB

### TECNICA DI APPROSSIMAZIONE

$$\tilde{a}_t = \begin{cases} a_t & a_{t+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ a_t + 1 & a_{t+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\} \end{cases}$$

### EPS

$$eps = \frac{1}{2} 2^{1-53} \approx 1.11 \cdot 10^{-16}$$

### EPSILON DI MACCHINA

$$eps = \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\varepsilon = 2.22 \cdot 10^{-16}$$

### MAX/MIN NUMERO RAPPRESENTABILE

Per la notazione IEE757  $\Rightarrow$  **U=1024 L=-1021** il massimo/minimo è fornito dal comando **matlab realmax realmin**

$$Max = 1.7977 \cdot 10^{308}$$

$$Min = 2.2251 \cdot 10^{-308}$$

## CANCELL.NE NUMERICA

La **cancellazione numerica** rappresenta una delle **conseguenze più gravi** della rappresentazione con precisione finita dei numeri reali.

Essa consiste in una **perdita di cifre significative**, che si verifica quando si esegue un'**operazione di sottrazione** fra due numeri di **segno uguale**

$$a_1 = m_1 B^e \quad a_2 = m_2 B^e$$

$$\bar{a}_1 = \bar{m}_1 B^e \quad \bar{a}_2 = \bar{m}_2 B^e$$

in aritmetica esatta

$$a_1 = 0.157824831$$

$$a_2 = 0.157348212$$

in aritmetica finita

$$\bar{a}_1 = 0.15782$$

$$\bar{a}_2 = 0.15735$$

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0.000476619 \\ &= 0.476619 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \ominus \bar{a}_2 &= 0.00047 \\ &= 0.47000 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

## ERRORE MASSIMO

Tutte le operazioni aritmetiche di macchina possono provocare un errore che non supera mai la precisione di macchina **eps**

### EX

Implementiamo in Matlab il calcolo della quantità

$$y = \frac{(1+x) - 1}{x}$$

per i valori di  $x$  uguali a  $10^{-k}$ ,  $k = 1, \dots, 15$ . Tenendo conto che in precisione infinita di calcolo  $y \equiv 1$  qualunque sia  $x$ , stampiamo l'errore assoluto  $|1 - y|$  associato a  $y$ , per ogni valore di  $x$  considerato.

```
>> k = 1:15;  
>> x = 10.^-k;  
>> y = ((1+x)-1)./x;  
>> err = abs(1-y);  
>> [x' err']
```

```
ans =  
1.0000e-01 8.8818e-16  
1.0000e-02 8.8818e-16  
1.0000e-03 1.1013e-13  
1.0000e-04 1.1013e-13  
1.0000e-05 6.5512e-12  
1.0000e-06 8.2267e-11  
1.0000e-07 5.8387e-10  
1.0000e-08 6.0775e-09  
1.0000e-09 8.2740e-08  
1.0000e-10 8.2740e-08  
1.0000e-11 8.2740e-08  
1.0000e-12 8.8901e-05  
1.0000e-13 7.9928e-04  
1.0000e-14 7.9928e-04  
1.0000e-15 1.1022e-01
```

## ELIMINARE CANCELL.

L'errore di cancellazione può essere eliminato **riformulando il problema stesso**.

### ESEMPI NOTEVOLI

$y = \sqrt{x + \delta} - \sqrt{x}$ , con  $x > 0$ .

Se  $|\delta| \ll x$  il fenomeno della cancellazione numerica si elimina nel seguente modo:

$$y = (\sqrt{x + \delta} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x + \delta} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \delta} + \sqrt{x}} = \frac{\delta}{\sqrt{x + \delta} + \sqrt{x}};$$

se  $\delta \approx -x$  il fenomeno non è eliminabile;

$y = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ , con  $x \approx 0$ .

Il fenomeno della cancellazione numerica si elimina utilizzando la formula trigonometrica  $1 - \cos(x) = 2 \sin^2(x/2)$ :

$$y = \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2$$

$y = \frac{x - \sin(x)}{\tan(x)}$ , con  $x \approx 0$ .

Il fenomeno della cancellazione numerica si elimina utilizzando il polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e di grado opportuno:

$$y = \frac{1}{\tan(x)} \left( x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \right) = \frac{x^3/3! - x^5/5! + x^7/7! - \dots}{\tan(x)}.$$

$y = \frac{1 - \exp(x)}{x}$ , con  $x \approx 0$ .

Il fenomeno della cancellazione numerica si elimina utilizzando il polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e di grado opportuno:

$$y = \frac{1}{x} \left( 1 - \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \right) = - \left( 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots \right).$$

## CONDIZIONATO DI UN PROBLEMA

Il condizionamento in matematica, riguarda il **rapporto tra errore commesso** sul risultato di un calcolo e **incertezza sui dati in ingresso**.

$$x \rightarrow y$$
$$f$$

Il problema deve essere posto in modo che siano chiari i **dati di input e output**, comprese le **funzioni** che li legano

### PROBLEMA CORRETTAMENTE CONDIZIONATO

Un problema si dice correttamente condizionato se le **perturbazioni** sui valori in uscita **sono simili** a quelle dei valori in entrata.

$$\frac{\|f(x) - f(\bar{x})\|}{\|f(x)\|} \approx \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \quad x, f(x) \neq 0$$

## NUMERO DI CONDIZIONATO

$K$  si dice **numero di condizionamento**

$$\frac{\|f(x) - f(\bar{x})\|}{\|f(x)\|} \begin{cases} \approx K(f, x) \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \\ \leq K(f, x) \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \end{cases} \quad x, f(x) \neq 0$$

$K=1$  **PROBLEMA BEN CONDIZIONATO**

## EX

### ESEMPI NOTEVOLI

Studiamo il condizionamento del seguente problema:

$$y = x_1 + x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Denotiamo con  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  i dati perturbati e determiniamo una maggiorazione dell'errore relativo associato al risultato perturbato  $\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ . Si ha

$$\frac{y - \bar{y}}{y} = \frac{x_1 + x_2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 + x_2 - x_1(1 + \varepsilon_1) - x_2(1 + \varepsilon_2)}{x_1 + x_2} = -\frac{x_1}{x_1 + x_2} \varepsilon_1 - \frac{x_2}{x_1 + x_2} \varepsilon_2$$

da cui

$$\frac{|y - \bar{y}|}{|y|} \leq K_1 \frac{|x_1 - \bar{x}_1|}{|x_1|} + K_2 \frac{|x_2 - \bar{x}_2|}{|x_2|}$$

Pertanto, le quantità  $K_i = |x_i|/(x_1 + x_2)$   $i = 1, 2$  rappresentano i numeri di condizionamento del problema e il problema è mal condizionato ( $K_i \rightarrow \infty$ ) se  $x_1 + x_2 \rightarrow 0$ .

## ALGORITMO

Per **algoritmo** si intende una **sequenza finita di operazioni** (aritmetiche e non) che consente di ottenere l'**output  $y^*$**  del problema  **$y = f(x)$**  a partire dall'**input  $x$** .

$$\frac{\|f(\bar{x}) - y^*\|}{\|f(\bar{x})\|} \approx \epsilon$$

Valuto la risposta  **$Y^*$**  elaborata da dati **soggetti ad errore di rappresentazione**, con la risposta  **$f(x)$**  ottenuta in **infinita precisione** di calcolo. Se vale la relazione sopra riportata, il **problema è ben condizionato**.

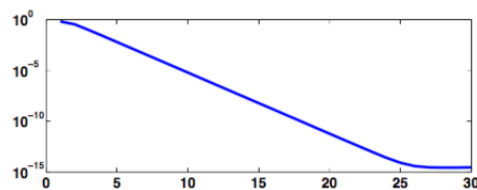
## ESEMPIO

L'algoritmo precedentemente descritto per il calcolo di  $\pi$  è instabile. L'algoritmo

$$x_1 = 2, \quad x_n = \sqrt{\frac{2x_{n-1}^2}{1 + \sqrt{1 - 4^{1-n}x_{n-1}^2}}}, \quad n \geq 2$$

che si ottiene razionalizzando, è invece stabile.

Figura : Logaritmo dell'errore relativo  $|\pi - x_n|/|\pi|$  al variare di  $n$



# Approssimazione di dati e funzioni

## APPROX. FUNZIONE

Approssimare una funzione  $f$  significa **sostituirla con una funzione  $g$**  che le sia “vicina” in qualche senso e **abbia una forma più semplice**

$$\tilde{f} \approx f$$

## INTERPOLAZIONE

Per interpolazione si intende un metodo per individuare **nuovi punti del piano cartesiano** a partire da un **insieme finito di punti dati**, nell'ipotesi che tutti i punti si possano riferire ad una **funzione  $g(x)$**  di una data famiglia di funzioni di una variabile reale.

## NODI

Coppie di **valori  $(x,y)$  costituenti l'input** del problema d'interpolazione.

## INTERPOL.NE POLINOMIALE

Dati una serie di **nodi** esiste **unico** un **polinomio interpolante** di **grado minore uguale al numero dei nodi** che soddisfa le seguenti condizioni

$$p_n(x_i) = y_i \quad i=1,2,\dots,n$$

$$\deg(p_n) = (n-1)$$

## UNICITA' POLINOMIO INTERPOLANTE

Dati **n nodi** esiste **unico** un polinomio interpolante di **grado  $(n-1)$**

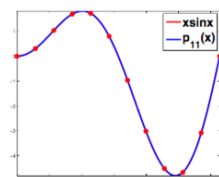
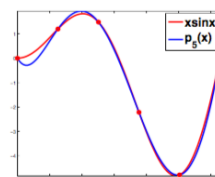
**$c = \text{POLYFIT}(X, Y, N)$**

Restituisce i **coefficienti** del polinomio interpolatore di **grado  $n$**  derivato dai **nodi  $(x,y)$** . **ordinati in potenze decrescenti**

$$p_n(x) = c(1)x^n + c(2)x^{n-1} + \dots + c(n)x + c(n+1)$$

**NOTA BENE:** Polyfit è in grado di dare un'approssimazione ben condizionata solo quando il suo **grado è basso**.

```
...  
x = linspace(0,2*pi,12);  
f = @(x) x.*sin(x);  
y = f(x);  
c = polyfit(x,y,11);  
Warning: Polynomial is  
badly conditioned.....
```



**$p = \text{POLYVAL}(C, Z)$**

Restituisce i un vettore **p** contenente i valori del polinomio interpolante a **coefficienti  $c$**  lungo gli elementi del vettore **z**.

## INTERPOLAZ. DI LAGRANGE

La formula generica per l'interpolazione corrisponde alla **sommatoria dei valori  $f(x_i)$**  moltiplicati per la **produttoria dei nodi escluso il nodo  $x_i$**  considerato ( $j \neq i$ ).

$$P(x) = \sum_{i=1}^n f(a_i) \prod_{j \neq i}^n \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

$$l_n(x) = \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i}^n \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

### ESEMPIO

(-1,-1) (2,-2) (3,-11)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)} - 2 \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(2+1)(2-3)} - 11 \cdot \frac{(x+1)(x-2)}{(3+1)(3-2)} = \\ &= \frac{1}{12}(x^2 - 5x + 6) + \frac{2}{3}(x^2 - 2x - 3) - \frac{11}{4}(x^2 - x - 2) = \\ &= -2x^2 + x + 4 \end{aligned}$$

## DIFFERENZA DIVISA

Si definisce **differenza divisa di ordine  $n$**  per il polinomio interpolatore

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] := \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

### SONO INVARIANTI RISPETTO ALLE PERMUTAZIONI

$$f[x_1, x_2] = f[x_2, x_1]$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = f[x_2, x_1, x_3] = f[x_3, x_2, x_1]$$

## INTERPOLAZ. DI NEWTON

$$p_n(x) = f(x_1) + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2) + \dots + f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}](x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Rispetto all'interpolatore di lagrange, **aggiungere un nuovo nodo significa creare un nuovo termine da sommare.**

### ESEMPIO

Scriviamo la rappresentazione di Newton del polinomio  $p_3(x)$  interpolante i punti (0, 1), (1, -1), (2, 1), (1/2, 2). Calcoliamo le differenze divise:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
0 <b>1</b>			
1    -1	$\rightarrow \frac{-1-1}{1-0} = -2$		
2    1	$\rightarrow \frac{1-(-1)}{2-1} = 2$	$\rightarrow \frac{2-(-2)}{2-0} = 2$	
1/2    2	$\rightarrow \frac{2-1}{1/2-2} = -\frac{2}{3}$	$\rightarrow \frac{-2/3-2}{1/2-1} = \frac{16}{3}$	$\rightarrow \frac{16/3-2}{1/2-0} = \frac{20}{3}$

Si ha allora

$$p_3(x) = 1 - 2(x-0) + 2(x-0)(x-1) + \frac{20}{3}(x-0)(x-1)(x-2)$$

## ERRORE DI INTERPOLAZ.

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

### NEI NODI

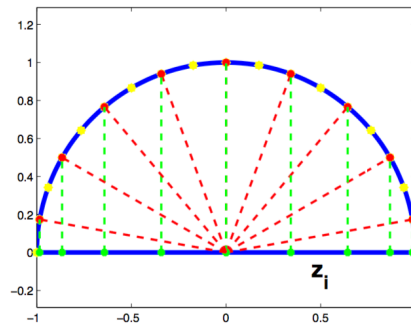
$E_n(x) = 0 \quad \forall x = x_i$  L'errore di interpolazione è nullo.

### PER POLINOMI INTERPOLATI

$E_n(x) = 0 \quad \forall x$  L'errore di interpolazione è nullo per via dell'**unicità del polinomio interpolatore** corrispondente all'interpolato nell'intervallo d'interesse.

## POLINOMIO DI CHEBYSHEV

In matematica i **nodi di Čebyšëv**, o radici di Čebyšëv, sono le **radici dei polinomi di Čebyšëv**. Per ogni  $n$  intero naturale il **polinomio  $n$ -esimo** possiede  **$n$  radici semplici interne all'intervallo  $[-1, 1]$**



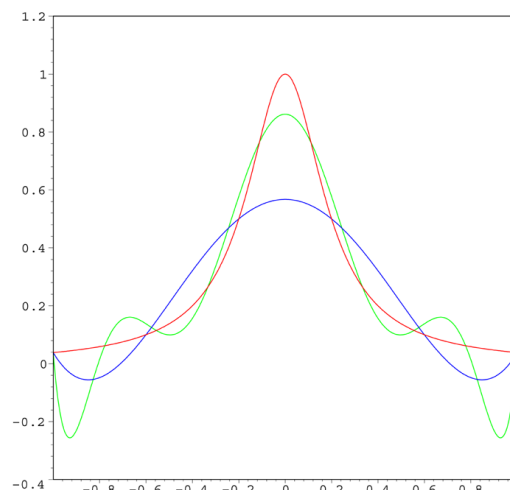
$$x_i := \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \quad 1 \leq i \leq n.$$

### UTILIZZANDO I PUNTI SOLUZIONE

Nella valutazione dell'interpolazione polinomiale abbiamo garantito che **l'errore è stabilizzato**, ovvero è stata operata la **miglior scelta dei nodi**

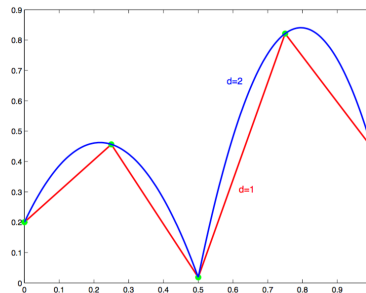
$$f \in C^1([A, B]) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [A, B]} \|f(x) - P_n(x)\| = 0$$

L'aumento del grado del polinomio interpolante non assicura la diminuzione dell'errore, che è piuttosto **dato dalla scelta dei nodi**.



## SPLINE

Una spline è una funzione, costituita da un **insieme di polinomi raccordati tra loro**, il cui scopo è interpolare in un intervallo un insieme di punti, in modo tale che la funzione sia **continua almeno fino ad un dato ordine di derivate** in ogni punto dell'intervallo.



## DERIVABILITA' E CONVERGENZA

Sono due delle caratteristiche fondamentali delle polinomiali a tratti. Esse infatti tendono ad essere **regolari nei punti di raccordo**, e a **convergere alla funzione al crescere dei nodi**.

## SPLINE CUBICHE

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$[a, b] = \bigcup_{i=1} [x_i, x_{i+1}] \quad y_i = f(x_i)$$

La funzione **S3(x)** si dice **spline cubica interpolante** per f se:

A.  $S_3(x)$  è un polinomio di grado 3

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], i = 1, \dots, n;$$

B.  $S_3^k(x)$  è continua

$$\forall x \in [a, b], k=0,1,2$$

$$C. S_3(x_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, (n+1)$$

## OSSERVAZIONE

Per determinare una spline di **grado 3** in ogni sottointervallo è necessario assegnare **4 condizioni!**

$$\begin{array}{l} 4n \text{ condizioni} \\ n = \text{nodi} \end{array} \quad \begin{cases} \text{Continuità } S_3^k(x) \\ \text{Nodi} \end{cases} = \begin{cases} 3(n-1) \\ (n+1) \end{cases} = 4n - 2$$



## TIPI DI SPLINE

Le ultime due condizioni (**parametri liberi** della spline) determinano diversi tipi di spline:

### A. SPLINE NATURALI

**Derivata (2) continua in  $x_1, x_{n+1}$**

$$S_3^2(x_1) = 0, S_3^2(x_{n+1}) = 0$$

### B. SPLINE NOT-A-KNOT

**Derivata (3) continua in  $x_2, x_n$**

$$S_3^3 \text{ continua in } x_2 \text{ e } x_n$$

$$S_3^3(x_2^+) = S_3^3(x_2^-);$$

$$S_3^3(x_n^+) = S_3^3(x_n^-);$$

### C. SPLINE VINCOLANTE

**Derivata (1) in  $x_1, x_{n+1}$  coincide con  $f'$**

$$S_3^1(x_1) = f'(x_1);$$

$$S_3^1(x_{n+1}) = f'(x_{n+1});$$

## TEOREMA CONVERG. SPLINE

Sia  $S_3$  una spline naturale o vincolante, interpolante una funzione di classe  $C^4$ . Allora

$$h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_i)$$

$$f \in C^4([a, b]) \Rightarrow p=0,1,2,3$$

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x) - S_3^{(k)}| = O(h^{4-k}) \text{ per } h \rightarrow 0$$

## CONVERGENZA

Tutte le spline  $S_3$  convergono a **f** in **[a,b]**, tutte le derivate fino all'ordine 3 convergono alle **derivate della spline**.

## CONDIZIONE DI SATURAZIONE

$O(h^4)$  è il **massimo ordine di convergenza ottenibile** con spline cubiche, anche con **f  $C^k$   $k > 4$**

## COMANDI

**$s = \text{SPLINE}(X, Y, Z)$**

Dati i vettori dei **nod**i (X,Y) calcola la spline **KNOT-A-NOT** in **z**

**$s = \text{SPLINE}(x, [y d1 \ y \ y d n], z)$**

Dati i vettori dei **nod**i (X,Y) calcola la spline **SPLINE VINCOLANTE IN Z**  
 $y d1 = f'(x_1) \quad y d n = f'(x_n)$

**$s = \text{INTERP1}(X, Y, Z) / \text{INTERP1}q(X, Y, Z)$**

Dati i vettori dei **nod**i (X,Y) calcola la spline **LINEARE** in **z**.  
Per la **versione quick** i nodi devono essere **ordinati**.

## INTEGRAZIONE

È noto che non sempre si riesce a trovare in forma esplicita la primitiva di una funzione. Anche nel caso in cui la si conosca, potrebbe essere complicato valutarla. Ad esempio, si consideri la **funzione degli errori**

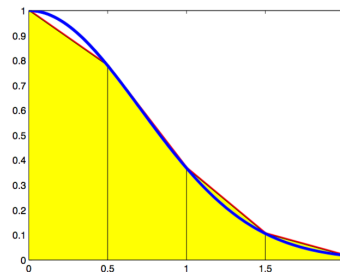
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

che interviene spesso nel calcolo delle probabilità, nella statistica e nelle equazioni differenziali alle derivate parziali. È noto che

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1};$$

pertanto, il problema del calcolo dell'integrale, si è trasformato in quello (altrettanto problematico) della somma dell'espressione (serie) al secondo membro.

In questi casi, si può procedere approssimando l'integrale di  $f(x)$  mediante l'integrale della spline  $S_1(x)$  lineare e interpolante  $f$ ; il vantaggio è che quest'ultimo valore è analiticamente calcolabile.



L'espressione che definisce il valore approssimato dell'integrale è detta **formula dei trapezi**, per via della sua interpretazione geometrica, ed è implementata nella function Matlab **trapz**.

### Comando Matlab

**t = trapz(x,y)** memorizza in **t** il valore approssimato dell'integrale ottenuto mediante la formula dei trapezi, ottenuto cioè calcolando (analiticamente) l'integrale della spline lineare e interpolante i dati  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

```
f=inline('exp(-t.^2)');
x=2;
j=1;
for i=2:9
    nodi(j)=2.^i+1;
    xi=linspace(0,x,nodi(j));
    yi=f(xi);
    I(j)=2/sqrt(pi)*trapz(xi,yi);
    err(j)=abs(erf(fi)-I(j));
    j=j+1;
end
[nodi' I' err']
```

## NORME

Una coppia norma + spazio costituisce uno **spazio normato**.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^t x}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

La **norma matriciale** viene interpretata tramite il prodotto matrice vettore

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

### A. NORMA 1

Elemento più grande

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

### B. NORMA 2 - SPETTRALE

p(b) si dice **raggio spettrale**

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} \text{ con } \rho(B) = \max |\lambda_i|, B \text{ autovalore}$$

**Se la matrice è simmetrica:**  $\|A\|_2 = \rho(A)$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max(\text{eig}(A^t A))}$$

### C. NORMA INFINITO

Norma 1 della matrice trasposta

$$\|A\|_\infty = \|A^t\|_1$$

## MATRICI DOMINANTI

In algebra lineare una matrice a diagonale dominante è una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  i cui **elementi diagonali sono maggiori o uguali in valore assoluto della somma di tutti i restanti elementi della stessa riga** in valore assoluto

### DOMINANTE PER RIGHE

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

### DOMINANTE PER COLONNE

$$|a_{jj}| \geq \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ji}|$$

## CONDIZION. EQ LINEARI

$$Ax = B \Leftrightarrow \bar{A}\bar{x} = \bar{B}$$

## NUMERO DI CONDIZIONAMENTO DEL PROBLEMA

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

### CONDIZIONAMENTO NELLE NORME

Si dimostra che il numero di condizionamento del problema, nelle **norme 1,2,inf**, è uguale a 1

$K(A) \approx 1$  Il problema è **ben condizionato!**

## MATRICI NOTEVOLI

Le seguenti matrici pongono **problemi mal condizionati**.

### MATRICE DI VANDERMONDE

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

### MATRICE DI HILBERT

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \quad K_2(H) \approx 10^{n+1}$$

## CONDIZION. SU MATLAB

**`s=norm( Obj, T)`**

Dato l'**oggetto Obj** (vettore o matrice) calcola il tipo di **norma T (1,2,inf)**

**`s=cond( Obj, T)`**

Dato l'**oggetto Obj** (vettore o matrice) calcola il **numero di condizionamento del problema** in base alla **norma T (1,2,inf)**

**`s=hilb( N)`**

Genera la **matrice di Hilbert** di ordine **n**.

**`s=vander( X)`**

Dato il vettore degli **alfa (x)** genera la **Matrice di Vandermonde**

## EX

Risolvi il sistema lineare

$$H_n x = b$$

con  $H_n$  matrice di Hilbert di ordine  $n = 2, 3, \dots, 16$  e  $b$  definito in modo tale che il sistema abbia il vettore unitario come soluzione. Calcoliamo il condizionamento del sistema e l'errore relativo associato alla soluzione  $x$  in norma euclidea. I risultati ottenuti, sono stati riportati in tabella.

```
i = 1;
ordine = [2:16];
for n = 2:16
    A = hilb(n);
    b = sum(A,2);
    x = A\b; % risolvi Ax=b
    err(i) = norm(ones(n,1)-x);
    K2(i) = cond(A);
    i = i+1;
end
[ordine' err' K2']cc4344
```

n	errore	$K_2(A)$
2	8.9509e-16	1.9281e+01
3	1.7531e-14	5.2406e+02
4	2.9476e-13	1.5514e+04
5	4.0663e-12	4.7661e+05
6	7.2237e-10	1.4951e+07
7	4.7989e-08	4.7537e+08
8	1.0149e-06	1.5258e+10
9	5.8135e-05	4.9315e+11
10	9.4312e-04	1.6025e+13
11	2.6121e-02	5.2274e+14
12	3.0027e-01	1.7256e+16
13	1.1579e+00	8.2002e+19
14	1.1622e+02	1.0827e+18
15	1.5396e+01	6.8558e+17
16	1.2613e+01	4.0695e+17

## MATRICI NOTEVOLI

Le seguenti matrici pongono **problemi mal condizionati**.

### MATRICE DI VANDERMONDE

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-1} \end{pmatrix}$$

### MATRICE DI HILBERT

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \quad K_2(H) \approx 10^{n+1}$$

## CONDIZION. SU MATLAB

**$s = \text{norm}(\text{Obj}, T)$**

Dato l'oggetto **Obj** (vettore o matrice) calcola il tipo di **norma T (1,2,inf)**

**$s = \text{cond}(\text{Obj}, T)$**

Dato l'oggetto **Obj** (vettore o matrice) calcola il **numero di condizionamento del problema** in base alla **norma T (1,2,inf)**

**$s = \text{hilb}(N)$**

Genera la **matrice di Hilbert** di ordine **n**.

**$s = \text{vander}(X)$**

Dato il vettore degli **alfa (x)** genera la **Matrice di Vandermonde**

## DIRETTI

## METODI NUMERICI DIRETTI PER LA RISOLUZIONE $AX=B$

### A. N-1 PASSI

Permettono di determinare  $x$

### B. PRECISIONE

Se finita vi è una **perturbazione**

### C. PER MATRICI PICCOLE-MEDIE

A. BACKWARD. `for( (n-1):-1:1) — s=A(i;i+1:n)*x(i+1,n)`

B. FORWARD `for( 2:n ) — s= A(i;1:(i-1))* x(1,i-1)`

C. CRAMER costo= $(n+1)!$

D. GAUSS

## BACKWARD

### SISTEMI TRIANGOLARI SUPERIORI

Ricavo l'ultima incognita  $x_n$  e procedo inversamente

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}} \end{cases}, \quad i = n-1, \dots, 1$$

**COSTO COMPUTAZIONALE**  $O(\frac{n^2}{2})$

### ESEMPIO

```
A = [...; ...; ...];
b = [.; .; .];
n = length(b);
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n)/A(n,n);
for i = n-1:-1:1
    s = 0;
    for j = i+1:n
        s = s+A(i,j)*x(j);
    end
    x(i) = (b(i)-s)/A(i,i);
end
```

Un'alternativa che sfrutta la capacità di Matlab di operare in modo ottimizzato direttamente sui vettori (attraverso la libreria BLAS (Basic Linear Algebra Subprograms) è la seguente:

$$s = A(i,i+1:n)*x(i+1:n)$$

## FORWARD

### SISTEMI TRIANGOLARI INFERIORI

Ricavo la **prima incognita** e tutte le altre di seguito.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n$$

**COSTO COMPUTAZIONALE**  $O(\frac{n^2}{2})$

### ESEMPIO

```
A = [...; ...; ...];
b = [.; .; .];
n = length(b);
x = zeros(n,1);
x(1) = b(1)/A(1,1);
for i = 2:n
    s = A(i,1:i-1)*x(1:i-1);
    x(i) = (b(i)-s)/A(i,i);
end
```

## ELIMINAZIONI DI GAUSS

Assegnato un sistema lineare  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  di ordine  $n$ , il metodo delle eliminazioni di Gauss trasforma, in  $(n - 1)$  passi, il sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  in uno equivalente  $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}$ , con  $\mathbf{U}$  matrice triangolare superiore.

$$k = 1, \dots, n - 1$$

$$i = k + 1, \dots, n \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{ik} = -a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad j = k + 1, \dots, n \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} + m_{ik} b_k^{(k)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_k = \frac{b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)} x_j}{a_{kk}^{(k)}}, \quad k = n - 1, \dots, 1 \end{array} \right.$$

**COSTO COMPUTAZIONALE**  $O(\frac{n^3}{3})$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1/4 & -5/2 & 9/4 \\ 0 & -1 & 2/5 & 29/10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/4 \\ 29/10 \end{pmatrix}$$

Raccogliendo i moltiplicatori in una matrice triangolare inferiore  $\mathbf{L}$  con diagonale unitaria e considerando la matrice triangolare superiore  $\mathbf{U}$  ottenuta al passo  $n-1$ , si ottiene la fattorizzazione  $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$

`[L,U,P] = lu(A)` returns unit lower triangular matrix  $\mathbf{L}$ , upper triangular matrix  $\mathbf{U}$ , and permutation matrix  $\mathbf{P}$  so that  $\mathbf{P}^* \mathbf{A} = \mathbf{L}^* \mathbf{U}$ .

### ESEMPIO

```
A = [...; ...; ...];
b = [.; .; .];
n = length(b);
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        A(i,k) = -A(i,k)/A(k,k);
        for j = k+1:n
            A(i,j) = A(i,j)+A(i,k)*A(k,j);
        end
        b(i) = b(i)+A(i,k)*b(k);
    end
end
```

## CN APPLICAZIONE GAUSS

$a_{kk}^{(k)} \neq 0$  è soddisfatta se almeno una delle seguenti lo è

- A. A NON E' SINGOLARE (Al massimo pivoto, ma ho pivot)
- B. A DOMINANTE PER R/C
- C. A SIMMETRICA DEFINITA POSITIVA

## PIVOTING PARZIALE

Nell'algoritmo di Gauss la scelta di un pivot con **valore assoluto grande** **migliora la stabilità** numerica dell'algoritmo.

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

Quando vengono scambiate **solo le righe o solo le colonne** della matrice si parla di **pivoting parziale**, altrimenti si ha **pivotazione totale**. La serie di scambi effettuati nel pivoting può essere rappresentata tramite **una matrice di permutazione P** ottenuta effettuando gli stessi scambi di righe e/o colonne sulla matrice identità. **PA=LU!**  
**In assenza di scambio P=I**

Il pivoting è **superfluo** se

- A. **DIAGONALE DOMINANTE PER COLONNE**
- B. **SIMMETRICA POSITIVA**

## INTERPRETAZ. GAUSS

$$MA = U$$

$$M = M_3 M_2 M_1$$

$$\Rightarrow A = M^{-1}U = LU$$

## FATTORIZZAZIONE

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_{i1} = -\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 & 0 \\ 0 & m_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_{43} & 1 \end{pmatrix}, \quad m_{i3} = -\frac{a_{i3}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & 0 \\ -m_{41} & -m_{42} & -m_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = A \backslash b$$

Calcola la soluzione  $x$  di  $Ax = b$  con il metodo di eliminazione di Gauss con **pivoting parziale**. È importante sapere che il comando richiama un **algoritmo specifico a seconda delle caratteristiche della matrice A** del sistema lineare (**sparsa, a banda, triangolare, simmetrica definita positiva**); se la matrice **non soddisfa** nessuna delle suddette caratteristiche, allora viene calcolata la generica **fattorizzazione PA=LU**

$$[L \ U \ P] = \text{lup}(A)$$

calcola i fattori **L, U, P** della **fattorizzazione PA = LU** di **A**.

**P** Matrice di permutazione, identica se non vi sono scambi

**U** Upper triangular

**P**. Lower triangular



## APPLICAZIONI GAUSS

### 1. RISOLUZIONE SISTEMI LINEARI

Costo computazionale  $O(n^2)$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \mathbf{PAx} = \mathbf{Pb} \iff \mathbf{L} \underbrace{\mathbf{Ux}}_y = \mathbf{Pb}$$

$$\iff \begin{cases} \mathbf{Ly} = \mathbf{Pb} & \Rightarrow y \\ \mathbf{Ux} = y & \Rightarrow x \end{cases}$$

### 2. CALCOLO DETERMINANTE

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^s \prod_{i=1}^n u_{ii},$$

S numero di permutazioni effettuate

### 3. CALCOLO INVERSA

Costo computazionale  $O(n^3)$

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU} \iff (\mathbf{PA})^{-1} = (\mathbf{LU})^{-1} \iff \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1} \\ \iff \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{P}$$

### 4. SISTEMI LINEARI CON A UGUALE

Costo computazionale  $O(\frac{n^3}{3} + pn^2)$

$$\begin{cases} \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{Ax}_3 = \mathbf{b}_3 \end{cases} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff \mathbf{A}(\underbrace{\mathbf{A}(\underbrace{\mathbf{Ax}}_y)}_z) = \mathbf{b} \iff \begin{cases} \mathbf{Az} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ay} = \mathbf{z} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \end{cases}$$

## FATTORIZZ. DI CHOLESKY

La **decomposizione di Cholesky** è la fattorizzazione di una **matrice simmetrica e definita positiva** in una **matrice triangolare inferiore** e nella sua **trasposta coniugata**. E' un **caso particolare di lu** in cui il **pivoting** è **superfluo** a causa della natura della matrice!

$$\mathbf{A} = \mathbf{LL}^+ \quad (\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times m} \text{ simmetrica positiva})$$

$\mathbf{L}$  matrice **triangolare inferiore con elementi diagonali positivi**

$\mathbf{L}^+$  matrice **triangolare superiore coniugata trasposta di  $\mathbf{L}$** . (trasposta e con scambio di ogni valore con il suo complesso coniugato.)

**COSTO COMPUTAZIONALE**  $O(\frac{n^3}{6})$

**$\mathbf{L\_PIU} = \text{chol}(\mathbf{A})$**

Calcola la matrice  $\mathbf{L}^+$  per la fattorizzazione  $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^+$  della **matrice simmetrica definita positiva  $\mathbf{A}$** .

## APPLICAZIONI 1. RISOLUZIONE SISTEMI LINEARI

### LU

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \mathbf{R}^T \underbrace{\mathbf{Rx}}_y = \mathbf{b} \iff \begin{cases} \mathbf{R}^T \mathbf{y} = \mathbf{b} & \Rightarrow \mathbf{y} \\ \mathbf{Rx} = \mathbf{y} & \Rightarrow \mathbf{x} \end{cases}$$

## 2. CALCOLO INVERSA

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \iff \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{R}^T)^{-1} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{R}^{-1})^T$$

**COSTO:**  $O(\frac{2n^3}{3})$

## FATTORIZZ. QR

La decomposizione **QR** o **fattorizzazione QR** di una matrice quadrata a coefficienti reali o complessi  $M$  è una scomposizione del tipo:

$$\mathbf{A}^{m \times n} = \mathbf{QR} \quad m \geq n$$

$$\begin{cases} \mathbf{Q}^{m \times m} \text{ ORTOGONALE} \\ \mathbf{R}^{m \times n} \text{ TRAPEZ.SUPERIORE} \end{cases}$$

$\mathbf{R}$  trapezoidale superiore, con le **righe dalla  $n + 1$ -esima** nulle

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & \dots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & \dots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & \dots & q_{nm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & \dots & q_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La **complessità computazionale** di questo metodo risolutivo è quindi la **stessa** della soluzione mediante la **fattorizzazione LU** (o algoritmo di Gauss), ma questo algoritmo risulta avere una **migliore stabilità numerica**.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \implies \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{x} = \mathbf{b} \implies \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{Q}}^T \mathbf{b}$$

## SUPPONGO A CON RANGO MASSIMO

Rango  $n$ . Allora la fattorizzazione produce una **matrice R** uguale a quella **triangolare superiore** della fattorizzazione Cholesky.

$$[\mathbf{Q}, \mathbf{R}] = \text{qr}(\mathbf{A}, (0))$$

Calcola le matrici **QR** della fattorizzazione di **A**.  
Il parametro 0 identifica la versione **quicker**.

## CONDIZION. FATTORIZZAZ.

## FATTORIZZAZIONE PA=LU

$$K_{\infty}(\mathbf{U}) \leq 4^{n-1} K_{\infty}(\mathbf{A})$$

## FATTORIZZAZIONE QR

$$K_2(\tilde{\mathbf{R}}) = K_2(\mathbf{A})$$

La fattorizzazione non incide sul condizionamento. preferibile alla fattorizzazione Cholesky nei problemi mal condizionati.

Un sistema si dice **sovradeterminato** quando il numero delle equazioni lineari (vincoli) supera quello delle incognite (parametri)

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 = \gamma$$

La soluzione è data dal vettore  $x^*$  che **minimizza il resto**  $r = Ax - b$  in **norma euclidea**

$\gamma = 0$  Soluzione in senso classico

$\gamma \neq 0$  Soluzione minimi quadrati

### MINIMI QUADRATI

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2,$$

$$c = Q^T b$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|\tilde{R}x - c_1\|_2^2 + \|c_2\|_2^2$$

Se  $c_2 = 0$ , allora  $x$  è **soluzione nel senso classico**, altrimenti è **soluzione nel senso dei minimi quadrati** e la  $\|c_2\|_2$  fornisce la **misura del residuo**. Il costo computazionale di tale metodo è pari a quello della fattorizzazione QR.

La soluzione **non ha senso se A non ha rango massimo**.

Si dimostra che esiste **un unico vettore  $x^*$**  che minimizza la norma quadratica:

$$x = A \backslash b$$

Calcola le soluzioni  $x$  tramite **fattorizzazione QR**

### ESEMPIO

```
x = [0 0.06 0.14 0.25 0.31 0.47 0.60 0.70];
y = [0 0.08 0.14 0.20 0.23 0.25 0.28 0.29];
A = [x' ones(8,1)];
b = y';
[Q,R] = qr(A);
Qt = Q(:,1:2);
Rt = R(1:2,1:2);
cstar = Rt \ (Qt' * b);
z = linspace(-.2,.9);
p = polyval(cstar,z);
plot(x,y,'r*',z,p,'linewidth',3)
axis([-0.2 .9 min(p) max(p)])
pr = polyval(c,0.9)
```

Il medesimo vettore  $c^*$  si può ottenere anche mediante l'istruzione `cstar = polyfit(x,y,1)`. Il polinomio di grado 1, che si determina, è il polinomio che meglio approssima i dati assegnati secondo il criterio dei minimi quadrati, cioè il polinomio i cui coefficienti minimizzano la quantità

$$\|Ac - b\|_2.$$

# Autovalori e valori singolari

## AUTOVALORI AUTOVETTORI

Il primo sistema ammette soluzioni **x dette autovettori** in corrispondenza dei valori  $\lambda$  degli **autovalori**

$$Ax = \lambda x$$

$$R(A, x) := \frac{x^t Ax}{x^t x}$$

**$d = \text{eig}(A)$**

Restituisce un vettore **d** contenente tutti gli autovalori di **A**.

**$[X, D] = \text{eig}(A)$**

Restituisce la **matrice diagonale D** i cui elementi sono **gli autovalori di A** e la matrice **X** i cui **vettori colonna sono gli autovettori**.

## MATRICI SIMILI

$$Ax = \lambda x \Rightarrow S^{-1}Ax = \lambda S^{-1}x \Rightarrow S^{-1}ASS^{-1}x = \lambda S^{-1}x$$

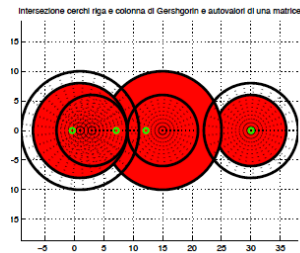
$$\Rightarrow Bz = \lambda z \text{ con } z = S^{-1}x,$$

## CERCHI DI GERSHGORIN

I **cerchi di Gershgorin** associati alla *i*-esima riga e *j*-esima colonna sono definiti come

$$C_i^{(r)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\},$$

$$C_j^{(c)} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \right\}.$$



## PRIMO TEOREMA

$$\forall \lambda(A) \subset \bigcup_{i=1}^n C_i^{(C) \cup (R)}$$

Tutti gli **autovalori** appartengono all'unione dei cerchi riga e colonna. Inoltre tutti gli **autovalori** appartengono all'unione dei **cerchi riga o colonna**.

## SECONDO TEOREMA

$$M_1 = \bigcup_{i=1}^k C_i^{(R)} \quad M_2 = \bigcup_{j=1}^k C_j^{(C)}$$

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} k & \text{autovalori in } M_1 \\ (n-k) & \text{autovalori in } M_2 \end{cases}$$

## PERTURBAZ. AUTOVALORI

Gli autovalori della seguente matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 101 & -90 \\ 110 & -98 \end{pmatrix}$$

sono dati da  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 1$ , e diventano  $\tilde{\lambda}_1 \approx 1.701$  e  $\tilde{\lambda}_2 \approx 1.298$  per la matrice perturbata

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 101 + \varepsilon & -90 + \varepsilon \\ 110 & -98 \end{pmatrix}$$

ottenuta ponendo  $\varepsilon = 0.001$ . Pertanto, ad una perturbazione assoluta pari a 0.1% sugli elementi della matrice corrisponde una variazione del 30% sugli autovalori.

## TEOREMA DI BAUER-FIKE

Sia  $\tilde{\mathbf{A}}$  una **perturbazione della matrice diagonalizzabile  $\mathbf{A}$** , e sia  $\tilde{\lambda}$  un suo autovalore. Allora

$$\min_{1 \leq p \leq n} |\tilde{\lambda} - \lambda_p| \leq K(\mathbf{S}) \|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|$$

### COROLLARIO

Il **condizionamento** del problema del calcolo degli **autovalori** dipende non dal numero di condizionamento della matrice  $\mathbf{A}$ , bensì **da quello della matrice degli autovettori**.

**Se  $\mathbf{A}$  è simmetrica  $K(\mathbf{S})=1$ !**

### ESEMPIO

```
>> A=[101 -90; 110 -98];  
>> [S,D]=eig(A);  
>> condizionamento=cond(S)  
condizionamento =  
4.0000e+02
```

### $d=\text{cond}(\mathbf{A})$

Restituisce uno scalare **d** contenente il numero  **$K(\mathbf{S})$**  associato al **condizionamento della matrice  $\mathbf{A}$** .

### $d=\text{condeig}(\mathbf{A})$

Restituisce uno scalare **d** contenente il numero  **$K(\mathbf{S})$**  associato al **condizionamento della matrice degli autovalori di  $\mathbf{A}$** .

## MATRICE DI HESSEMBERG

La **matrice di Hessenberg** è un particolare tipo di matrice quadrata, che è "quasi" triangolare. Per l'esattezza, una **matrice di Hessenberg superiore** ha valori pari a zero sotto la prima sottodiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## METODO DELLE POTENZE

Il metodo delle potenze permette di calcolare l'autovalore **di modulo massimo** ovvero il **raggio spettrale**

### A. DETERMINO AUTOVETTORI

Sono tutti linearmente **indipendenti** nello spazio complesso.

### B. QUALSIASI VETTORE Z

$$\mathbf{z} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n$$

### C. APPLICO LA MATRICE A N VOLTE

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{z} = \mathbf{A}(\mathbf{A} \mathbf{z}) = \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{x}_n$$

### D. MOLTIPLICO E DIVIDO PER IL RAGGIO SPETTRALE

$$\mathbf{z}^{(m)} = \lambda_1^m \left( \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^m \mathbf{x}_n \right) =: \lambda_1^m \mathbf{y}^{(m)}$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_k| \text{ per } k > 1$$

$$\left| \alpha_k \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^m \right| = |\alpha_k| \left| \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right|^m \rightarrow 0 \text{ per } m \rightarrow \infty.$$

$$\mathbf{y}^{(m)} \rightarrow \alpha_1 \mathbf{x}_1 \text{ per } m \rightarrow \infty.$$

Anche il vettore  $\mathbf{z}^{(m)} = \lambda_1^m \mathbf{y}^{(m)}$  tende ad **allinearsi all'autovalore**, ma tende a infinito (+ o -). E' **necessario normalizzarlo**

$$\mathbf{w}^{(m)} = \frac{\mathbf{z}^{(m)}}{\|\mathbf{z}^{(m)}\|_2}$$

$$\mathbf{z}^{(m+1)} = \mathbf{A} \mathbf{w}^{(m)}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{A} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}$$

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{z} / \text{norm}(\mathbf{z}); \\ \mathbf{z} = \lambda \mathbf{w} \\ \mathbf{z} = \mathbf{A} \mathbf{w} \end{cases} \Rightarrow \{ \lambda = \mathbf{w}^* \mathbf{z};$$

## CONVERGEN. AUTOVALORE

$$|\lambda_1^{(m)} - \lambda_1| \leq C \begin{cases} \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^m, & \text{se } \mathbf{A} \text{ non è simmetrica;} \\ \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2m}, & \text{se } \mathbf{A} \text{ è simmetrica.} \end{cases}$$

### ESEMPIO

```
function [lambda_max,w,m] = potenze(A,z,toll,m_max)
w = z/norm(z);
lambda = 0;
for m = 1:m_max
    z = A*w;
    lambda_max = w'*z ;
    w = z/norm(z);
    if abs(lambda_max-lambda) <= toll*abs(lambda_max)
        break
    end
    lambda = lambda_max;
end
```

## METODO DELLE POTENZE INVERSE

Il metodo delle potenze permette di calcolare **un qualsiasi autovalore** purchè **se ne conosca l'approssimazione**.

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow$$

$$(A - pI_n)x = (\lambda - p)x$$

$(\lambda - p)$  è **autovalore della matrice  $(A - pI)$**

$$\lambda = p + \frac{1}{\mu}$$

$$\mu = (\lambda - p)^{-1}$$

### APPROSSIMAZIONE LAMBDA MINIMO

Se si assume  **$p = 0$**

$$\begin{cases} w = z / \text{norm}(z); \\ [L, U, P] = \text{lu}(A - p * \text{eye}(n)); \\ z = U \setminus (L \setminus (P * w)); \\ \text{lamda} = p + \frac{1}{(w' * z)} \end{cases}$$

**$[X, D] = \text{eigs}(A, k, p)$**

Restituisce in **D** e in **X** rispettivamente, **k autovalori di A** (presumibilmente, sparsa e di grandi dimensioni) **più vicini a p** e i **corrispondenti autovettori**

### ESEMPIO

```
function [lambda_p, w, m] =  
potenze_inverse(A, p, z, toll, m_max)  
n = size(A);  
w = z/norm(z);  
lambda = 0;  
[L, U, P] = lu(A - p*eye(n));  
for m = 1:m_max  
    y = L \ (P * w);  
    z = U \ y;  
    lambda_p = p + 1/(w' * z);  
    w = z/norm(z);  
    if abs(lambda_p - lambda) <= toll * abs(lambda_p)  
        break  
    end  
    lambda = lambda_p;  
end
```

## METODO QR AUTOVALORI

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= \mathbf{Q}_k \mathbf{R}_k \\ \mathbf{A}_{k+1} &= \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k \end{aligned}$$

Osserviamo che tutte le matrici  $\mathbf{A}_k$  risultano simili ad  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{k+1} &= \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k = \underbrace{\mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_k}_{\mathbf{A}_k} \mathbf{R}_k \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k^T \underbrace{\mathbf{A}_k}_{\mathbf{R}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1}} \mathbf{Q}_k \\ &= \mathbf{Q}_k^T \underbrace{\mathbf{Q}_{k-1}^T \mathbf{Q}_{k-1}}_{\mathbf{A}_{k-1}} \mathbf{R}_{k-1} \mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{Q}_k = \dots \\ &= \mathbf{Q}_k^T \mathbf{Q}_{k-1}^T \dots \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{Q}_k \\ &= (\mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{Q}_k)^T \mathbf{A}_1 (\mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{Q}_k) = \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

Ogni iterazione del metodo comporta la determinazione di una fattorizzazione  $QR$ . Quando la matrice è densa, la decomposizione  $QR$  risulta eccessivamente onerosa: conviene allora, dapprima determinare, mediante trasformazioni ortogonali di similitudine, la matrice  $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$  (simile ad  $\mathbf{A}$ ) di Hessenberg superiore (se  $\mathbf{A}$  non è simmetrica)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

oppure tridiagonale (se  $\mathbf{A}$  è simmetrica)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

e poi applicare il metodo  $QR$  alla matrice  $\mathbf{B}$ .

### A. A SIMMETRICA

$\mathbf{A}_\infty$  è **diagonale** con autovalori.

### B. A NON SIMMETRICA - AUTOVALORI REALI

$\mathbf{A}_\infty$  è **triangolare superiore** con autovalori sulla diagonale.

### C. A NON SIMMETRICA - AUTOVALORI NON REALI

Quasi triangolare superiore.

### ESEMPIO

```
function [d,m] = qr_base(A,toll,m_max)
%la convergenza e' garantita solo
%se A ha autovalori distinti in modulo
for m = 1:m_max
    [Q,R] = qr(A);
    A = R*Q;
    if norm(tril(A,-1),inf) <= toll
        break
    end
end
d = diag(A);
```

### $\mathbf{B} = \text{hess}(\mathbf{A})$

Determina la matrice  $\mathbf{B}$  simile ad  $\mathbf{A}$  di Hessenberg.



## VALORE SINGOLARE

Nel caso finito-dimensionale, tramite la **decomposizione ai valori singolari** una matrice può essere **decomposta nella forma  $UDV$**  dove  **$U$  e  $V$  sono matrici unitarie, ortogonali** e  **$D$  una matrice diagonale (rettangolare) con autovalori sulla diagonale.**

Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Si dimostra che esistono due matrici ortogonali  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tali che

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{S} = \text{diag}(s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad p = \min(m, n)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & s_m & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{se } m < n, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & s_n \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{se } m > n,$$

## VETTORI SINGOLARI SX/DX

I vettori colonna  $\{\mathbf{v}_i\}$  e  $\{\mathbf{u}_i\}$  delle matrici  $\mathbf{V}(\mathbf{dx})$  e  $\mathbf{U}(\mathbf{sx})$

### $d=\text{svd}(\mathbf{A})$

Restituisce un **vettore  $\mathbf{d}$**  contenente i **valori singolari di  $\mathbf{A}$** ;

### $[\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}]=\text{svd}(\mathbf{A})$

Restituisce la **matrice diagonale  $\mathbf{S}$** , delle **stesse dimensioni di  $\mathbf{A}$**  e con elementi diagonali non negativi in ordine decrescente, e le matrici **ortogonali  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$**  tali che  **$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$** ;

### $d=\text{svd}(\mathbf{A}, 0)$

Rappresenta la **versione economica**, perchè se  **$m > n$**  restituisce solo le **prime  $n$  colonne di  $\mathbf{U}$**  e  **$\mathbf{S}$  è una matrice diagonale  $n \times n$**

## TEOREMA SVD

$$A = USV^T$$

- 1)  $A = U_r S_r V_r^T = \sum_{i=1}^r s_i u_i v_i^T$  ove
  - $U_r \in \mathbb{R}^{m \times r}$  è la matrice le cui colonne sono  $u_1, \dots, u_r$ ,
  - $V_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$  è la matrice le cui colonne sono  $v_1, \dots, v_r$ ,
  - $S_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$  è la matrice diagonale i cui elementi principali sono  $s_1, \dots, s_r$ ;
- 2) il nucleo di  $A$ ,  $\mathcal{N}(A) = \{x : Ax = 0\}$ , è generato dai vettori  $v_{r+1}, \dots, v_n$ ;
- 3) l'immagine di  $A$ ,  $\mathcal{I}(A) = \{y : y = Ax\}$ , è generata dai vettori  $u_1, \dots, u_r$  e quindi il rango di  $A$  è uguale a  $r$ ;
- 4)  $s_i^2$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sono gli autovalori della matrice  $A^T A$  (se  $m < n$  i restanti autovalori sono nulli) e quindi  $\|A\|_2 = s_1$ ;
- 5) se  $m = n$  e  $A$  è simmetrica, allora  $s_i = |\lambda_i|$ ,  $i = 1, \dots, n$  e i vettori singolari destri e sinistri coincidono con gli autovettori di  $A$ .

## TEOREMA SCARTO SVD

L'importanza di questo teorema risiede nel fatto che esso consente di **quantificare esattamente**, tramite il **valore singolare  $s_{k+1}$** , la **distanza in norma 2 della matrice  $A$  dalla più vicina matrice di rango  $k$**  e, quindi, di **stimare l'errore che si commette quando la matrice  $A$ , a seguito di operazioni eseguite in aritmetica finita, viene sostituita con una matrice di rango  $k$** .

Sia  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e sia

$$A = USV^T$$

la sua decomposizione ai valori singolari, dove

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > s_{r+1} = \dots = s_p = 0$$

e sia  $k$  un intero positivo minore o uguale a  $r$ . Indicando con

$$A_k = \sum_{i=1}^k s_i u_i v_i^T$$

e

$$\mathcal{B} = \{B : \text{rango di } B \text{ è } k\}$$

si ha

$$\min_{B \in \mathcal{B}} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = s_{k+1}$$

**RANK(A) = numero valori singolari != 0**

**$d = \text{rank}(A, \text{tol})$**

Permette di calcolare il **rango di  $A$**  dati valori singolari **maggiori della tolleranza**.

## CONDIZION. MATRICE

In base al teorema dei valori singolari e alla procedura di sv, si ha che

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\|_2 &= \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = \sqrt{\rho(\mathbf{V} \mathbf{S}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T)} = \sqrt{\rho(\mathbf{V} \mathbf{S}^2 \mathbf{V}^T)} \\ &= \sqrt{\rho(\mathbf{S}^2)} = s_1\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = 1/s_n$$

Il **costo di SVD** per la risoluzione dei sistemi lineari è  $O(\frac{32}{3n^3})$

## SV SISTEMI SOVRADET.

Ricordando la condizione per la convergenza del vettore soluzioni  $\mathbf{x}^*$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \mathbf{U}^T \mathbf{b} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$$

### DIMOSTRAZIONE

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 = \|\mathbf{U}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})\|_2^2 = \|\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{x} - \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|_2^2 = \|\mathbf{S} \mathbf{y} - \mathbf{U}^T \mathbf{b}\|_2^2$$

### PSEUDO INVERSA DI MOORE

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \mathbf{U}^T$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ rk(\mathbf{A}) = n \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$$

### $\mathbf{A}_{piu} = pinv(\mathbf{A})$

Restituisce la **pseudo-inversa di A**, a partire dalla sua **SVD**. I valori singolari al di sotto di una tolleranza di default sono trattati come zeri.

## COMPRESS. IMMAGINI

Ogni foto può essere **discretizzata decomponendo l'immagine** in quadretti e assegnando un livello di grigio ad ogni quadretto.

$$\mathbf{A}_n = \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$$

La matrice  $\mathbf{A}_n$  può essere **codificata mediante 2n vettori  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{v}_i$  e i numeri  $s_i$** . Se ad esempio è adeguato  $n = 5$ , per una matrice A di dimensioni  $1000 \times 1000$  sarà sufficiente memorizzare  $2 * 5 * 1000 + 5 = 10005$  valori anziché 1000000, con un **risparmio di quasi il 99%**.

---

## Note finali

Alcuni dei contenuti presenti nelle seguenti dispense sono stati liberamente tratti dai materiali didattici disponibili al Politecnico di Torino.

Le dispense sono state elaborate dal sottoscritto come complemento allo studio e non intendono in alcun modo sostituire la completezza dei libri di testo e delle lezioni dalle quali sono state liberamente tratte.

Le dispense sono state scritte per l'esame di Geometria Talenti dell'A.A. 2015-2016, docenti *E.Carlini* e *L.Scuderi*.

E' doveroso quindi citare alcuni delle fonti da cui sono stati liberamente tratti alcune parti di esercizi e/o metodologie di soluzione:

- **Enrico Carlini**, *Whiteboard del corso di Geometria e CN Talenti*, A.A. 2015-2016.
- **Letterio Gatto**, *Lezioni di algebra lineare e geometria per l'Ingegneria*, CLUT, Torino, 2013.
- **Silvio Mercadante**, *Slides del corso*, A.A. 2013-2014.
- **Segrio Polini**, *Algebra lineare for dummies*, 2013.
- **Letizia Scuderi**, *Laboratorio di calcolo numerico. Esercizi di calcolo numerico risolti con Matlab*, CLUT, Torino, 2005.
- **Letizia Scuderi**, *Slides del corso di Geometria e CN Talenti*, A.A. 2015-2016.